Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Finał cz. II

16 lutego 2018 roku

Instrukcja dla ucznia

1. Rozwiązania zadań zapisz na kartkach formatu A4, na jednej karcie rozwiązanie jednego zadania.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.

Życzymy powodzenia

Organizatorzy

Zadanie 1. Niech *x* i *y* będą dwiema różnymi liczbami dwucyfrowymi, z których każda zbudowana jest tylko z jednej cyfry. Wyznacz te liczby, jeśli $x^2 + y^2 = 100x + y$.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru *m* równanie

$$x^8 + (m-1)x^4 + (m+2)^4 = 0$$

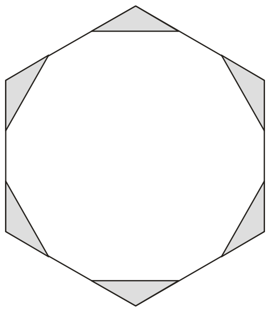
ma cztery pierwiastki x_1, x_2, x_3, x_4 takie, że $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ spełniające warunek

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2?$$

Zadanie 3. Boki trójkąta leżą na prostych $2x - 3y + 20 = 0$, $2x + y - 23 = 0$ i $y = \frac{5}{2}$. W trójkąt ten wpisano kwadrat w ten sposób, że na boku zawartym w prostej o równaniu $y = \frac{5}{2}$ leżą dwa wierzchołki tego kwadratu, a na pozostałych bokach po jednym. Napisz równanie okręgu wpisanego w ten kwadrat.

Zadanie 4. Pan Kupujący zapłacił banknotem 100zl. Kasjerka wydając mu resztę pomyliła złotówki z groszami. Pan Kupujący zabrał resztę i wręczył ją kasjerce w innym sklepie dokonując zakupów za 80zł, jednak kolejna kasjerka wydając resztę także pomyliła złotówki z groszami. Pan Kupujący zauważył, że reszta otrzymana od drugiej kasjerki jest 3 razy mniejsza od poprzedniej reszty. O ile trzykrotność reszty jaką powinien otrzymać Pan Kupujący za pierwszym razem jest większa od faktycznie otrzymanej reszty za pierwszym razem?

Zadanie 5. Niech k będzie liczbą całkowitą większą od 2. Od danego k-kąta foremnego W_0 odcięto wszystkie trójkąty, których jednym z wierzchołków jest wierzchołek wielokąta W_0, dwa boki każdego trójkąta leżą na bokach wielokąta W_0 i długość każdego z tych boków jest równa $\frac{1}{k}$ długości boku wielokąta W_0 na którym leży ten bok (rysunek obok przedstawia sytuację, gdy $k = 6$ – nie zostały zachowane proporcje). Otrzymano w ten sposób wielokąt W_1. Od powstałego wielokąta W_1 odcięto wszystkie trójkąty, których dwa boki leżą na bokach wielokąta W_1 i mają długość równą $\frac{1}{k}$ długości boku wielokąta W_1 na którym leżą, a jednym z wierzchołków jest wierzchołek wielokąta W_1. Otrzymano kolejny wielokąt W_2 od którego ponownie odcięto trójkąty, których dwa boki leżą na bokach wielokąta W_2 i mają długość równą $\frac{1}{k}$ długości boku wielokąta W_2 na którym leżą, a jednym z wierzchołków jest wierzchołek wielokąta W_2. W wyniku otrzymano wielokąt W_3. Czynność tę kontynuowano w nieskończoność. Otrzymano w ten sposób figurę f której pole jest równe polu wielokąta W_0 pomniejszonemu o sumę pól wszystkich odciętych trójkątów.



Wykaż, że stosunek pól figury f i wielokąta W_0 jest równy $\frac{k^2-2k+2+2\cos\frac{360^0}{k}}{k^2-2k+4}$.