Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Finał Cz. I

7 lutego 2017 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 15. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 30 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). Miary kątów przy kolejnych wierzchołkach czworokąta są równe $2\alpha, 3\alpha, 7\alpha, 6\alpha$. Czworokąt ten

A. jest trapezem;
B. jest deltoidem;
C. można wpisać w okrąg;
D. można opisać na okręgu.

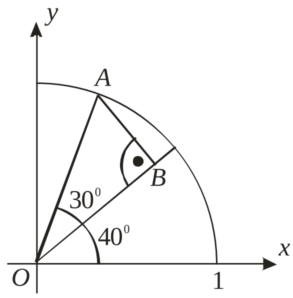
Zadanie 2 (2pkt.). Jaś zapisał na kartce wszystkie liczby naturalne dodatnie mniejsze od 2017, które są podzielne przez 3 lub przez 5, ale nie są podzielne przez 7. Liczba liczb zapisanych przez Jasia jest równa

A. 653; B. 787; C. 788; D. 807.

Zadanie 3 (2pkt.). Liczba całkowita dodatnia *n* ma 60 dzielników całkowitych dodatnich, a liczba $11n$ ma 80 dzielników całkowitych dodatnich. Największą potęgą liczby 11, która jest dzielnikiem liczby *n* jest

A. 11^1; B. 11^2; C. 11^3; D. 11^4.

Zadanie 4 (2pkt.). Punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ leżą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych: punkt *A* jest położony na okręgu o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych. Odcinki *OB* i *OA* są nachylone do osi *Ox* pod kątami odpowiednio 40^0 i 70^0. Odcinki *AB* i *OB* są prostopadłe (por. rysunek).



Wtedy $y_A - y_B =$

A. $\frac{1}{2}\cos 40^0$; B. $\sin 70^0$; C. $\frac{1}{2}$; D. $\sin 10^0$.

Zadanie 5 (2pkt.). Dane jest równanie $a\log 2 + b\log 3 + c\log 5 + d\log 7 + e\log 11 = 2017$ o niewiadomych wymiernych $a, b, c, d,$ i e. Rozwiązaniem tego równania jest każda uporządkowana piątka (a', b', c', d', e') liczb wymiernych spełniająca to równanie. Liczba rozwiązań tego równania jest równa

A. 0; B.1; C. 2015; D. 2016.

Zadanie 6 (2pkt.). Wyrażenie $\left[\dfrac{3^{-3^2}\left(3^3\right)^{-2}}{\left(3^{3^{-2}}\right)^{18}}\right]^{\frac{2}{17}}$ jest równe

A. $\frac{1}{9}$; B. 9; C. $-\frac{1}{9}$; D. -9.

Zadanie 7 (2pkt.). Końce odcinka *AB* położone są na paraboli $y = -3x^2 + 2x + 5$, a środek tego odcinka jest początek układu współrzędnych. Długość odcinka *AB* jest równa

A. $\frac{11\sqrt{3}}{3}$; B. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$; C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$; D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Zadanie 8 (2pkt.). Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 1$. Wtedy $f(f(f(1))) =$

A. 5; B. 15; C. 26 ; D. 37.

Zadanie 9 (2pkt.). W trójkącie prostokątnym *ABC* punkt *M* jest środkiem przyprostokątnej *AC* o długości 4. Punkt *N* jest położony na przyprostokątnej *BC* w taki sposób, że $|NC| = 2$ i $|NB| = 1$. Punkty *P* i *Q* są położone na przeciwprostokątnej *AB* tak, że odcinki *MP* i *NQ* są prostopadłe do przeciwprostokątnej. Pole pięciokąta *CMPQN* jest równe

A. 4; B. 4,4; C. 4,8 ; D. 5,2.

Zadanie 10 (2pkt.). Wielomian $W(x) = x^{4k+1} + x^{4k} + a_{4k-1}x^{4k-1} + a_{4k-2}x^{4k-2} + \ldots + a_1x + a_0$ ma co najmniej dwa różne pierwiastki wielokrotne, których suma krotności jest równa $4k+1$. Pierwiastki tego wielomianu (niekoniecznie różne) tworzą ciąg geometryczny o liczbie wyrazów równej $4k+1$.Wynika stąd, że $a_0 =$

A. -1; B. 1; C. -4^k; D. 4^k.

Zadanie 11 (2pkt.). Dane są punkty $A(4,-2), B(2,4), C(8,3), D(8,-1), E(16,1), F(9,8)$. Figura *F* jest zbiorem tych punktów *X*, że $|AX| \le |XB|$, $|CX| \le |XD|$, $|EX| \ge |XF|$. Pole figury *F* jest równe

A. 9 B. 10; C. 11; D. 12.

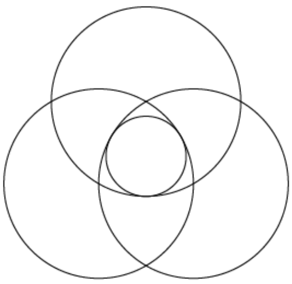
Zadanie 12 (2pkt.). Suma dziesięciu najmniejszych dodatnich rozwiązań równania $2\cos^2(\pi x) + a\sin(\pi x) + 3 = 0$ jest równa 95. Wtedy $|a| =$

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

Zadanie 13 (2pkt.). W urnie znajduje się 120 kul białych, 90 czarnych, 65 zielonych i 50 żółtych. Zauważmy, że gdybyśmy wylosowali 5 kul to możemy mieć pewność, że wśród nich jest jedna para kul tego samego koloru, a wylosowanie 7 kul gwarantuje nam, że mamy dwie pary kul o tym samym kolorze. Losujemy *k* razy po jednej kuli i nie zwracamy jej do urny przed kolejnym losowaniem. Jest pewne, że wśród wylosowanych kul jest 10 par kul o tym samym kolorze. Najmniejsza liczba *k*, która to gwarantuje jest równa

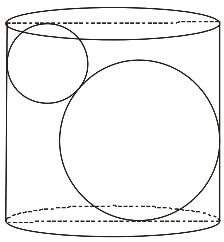
A. 20; B. 21; C. 22; D. 23.

Zadanie 14 (2pkt.). Każde dwa z trzech okręgów o promieniu $\sqrt{3}$ przecinają się w dwóch punktach, z których jeden jest środkiem trzeciego okręgu. Promień okręgu wewnętrznie stycznego do każdego z tych okręgów położonego tak jak na rysunku, jest równy



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$; B. $\sqrt{3}-1$; C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 15 (2pkt.). W cylindrze (walcu) o średnicy podstawy równej 50 znajdują się dwie kule o promieniach 8 i 21 (tak jak na rysunku). Każda z tych kul dotyka powierzchni bocznej cylindra i jeszcze jednej powierzchni cylindra. Wysokość cylindra jest równa



A. 42; B. 45; C. 49; D. 50.

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię…………………………………………………………………………………………..

Nazwisko……………………………………………………………………………………..

Szkoła…………………………………………………………………………………………

Miejscowość…………………………………………………………………………………..

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
~~**A**~~
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**	**15.**