



**MATEMATYKA
MOJA PASJA**



Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Finał Cz. I

27 stycznia 2015 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 15. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 30 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). Wykres funkcji liniowej $f(x) = kx + l$, gdzie $k, l > 0$, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $\frac{9}{4}$. Wtedy

A. $\frac{k}{l} = \frac{2}{3}$; B. $\frac{k}{l} = \frac{3}{2}$; C. $\frac{k}{l} = \frac{4}{9}$;

D. stosunek $\frac{k}{l}$ nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Zadanie 2 (2pkt.). W sumie $1^{2015} + 2^{2015} + 3^{2015} + \dots + 2015^{2015}$ jest 2015 składników. Ostatnią cyfrą tej sumy jest

A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

Zadanie 3 (2pkt.). Liczbę pięciocyfrową nazwiemy *specyficzną*, jeśli suma cyfr tysięcy i jedności tej liczby jest mniejsza od sumy cyfr dziesiątek i setek tej liczby. Liczba wszystkich pięciocyfrowych liczb specyficznych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4 i 5 jest równa

A. 42; B. 44; C. 46; D. 48.

Zadanie 4 (2pkt.). Liczba punktów wspólnych wykresu funkcji $f(x) = \left(\frac{4}{9}\right)^{-|x|-\frac{1}{2}} - 1$ i prostej

o równaniu $y = \frac{1}{2}$, jest równa

A. 0; B. 1; C. 2; D. 4.

Zadanie 5 (2pkt.). Liczby całkowite, dodatnie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ spełniają warunki $\log_{\alpha} \gamma = \frac{5}{6}$ i

$\log_{\beta} \delta = \frac{1}{2}$. Jeśli $\alpha - \beta = 53$, to wtedy $\gamma - \delta =$

A. 47; B. 89; C. 143; D. 217.

Zadanie 6 (2pkt.). Wyrażenie $\sqrt{a^4 a^7 \sqrt{a}}$ dla $a = \sqrt[9]{5^{14}}$ jest równe

A. $\sqrt[7]{5}$; B. $\sqrt[5]{5}$; C. $\sqrt[3]{5}$; D. 5.

Zadanie 7 (2pkt.). Dane jest równanie $3x^2 + mx + 13 = 0$. Liczba wszystkich wymiernych m , większych od 1 i mniejszych od 100, dla których równanie ma pierwiastek całkowity jest równa

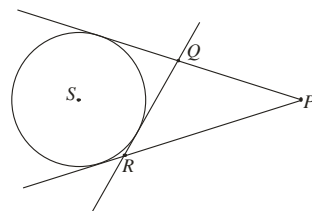
A. 29; B. 31; C. 33; D. 35.

Zadanie 8 (2pkt.). Proste PQ , PR i QR są styczne do okręgu o środku S . Miary kątów QPR i QSR są równe. Wtedy

A. $|\angle QPR| = 40^\circ$; B. $|\angle QPR| = 50^\circ$;

C. $|\angle QPR| = 60^\circ$;

D. miara kąta QPR nie jest wyznaczona jednoznacznie.



Zadanie 9 (2pkt.). Dana jest funkcja $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$. Określamy funkcję $f_2(x) = f_1(f_1(x))$.

Jeśli dla pewnego całkowitego $i \geq 1$ określona jest już funkcja $f_i(x)$, to wtedy określamy

funkcję $f_{i+1}(x) = f_i(f_i(x))$. Mamy np. $f_2(2) = \frac{2}{5}$ i $f_3(2) = \frac{2}{7}$. Można obliczyć, że $f_5(1) =$

- A. $\frac{1}{5}$; B. $\frac{1}{7}$; C. $\frac{1}{9}$; D. $\frac{1}{11}$.

Zadanie 10 (2pkt.). Rozważmy następujące równania:

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \quad x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}, \quad x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}, \quad x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}, \quad x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}}.$$

Każde z nich ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie. Dodatnie rozwiązania tych równań zapisane w kolejności występujących równań tworzą ciąg

- A. stały; B. malejący; C. rosnący;

D. o wyrazach wymiernych.

Zadanie 11 (2pkt.). Reszta z dzielenia wielomianu $x^4 + x^2 + 2$ przez wielomian $W(x)$ jest równa 4. Wtedy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nie może być

- A. liczba -1 B. liczba 1 ; C. liczba 2 ; D. liczba wymierna.

Zadanie 12 (2pkt.). Liczba dodatnich liczb całkowitych $k \in \langle 1, 12 \rangle$, dla których $\sin(6k) > 0$, jest równa

- A. 1 ; B. 2 ; C. 3 ; D. 4 .

Zadanie 13 (2pkt.). Liczba różnych od liczb pierwszych dzielników naturalnych liczby $374 \cdot 195$ jest równa

- A. 48 ; B. 53 ; C. 58 ; D. 64 .

Zadanie 14 (2pkt.). Odległości środka okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny od wierzchołków kątów ostrych są odpowiednio równe $\sqrt{2}$ i 1 . Pole tego trójkąta jest równe

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; C. 1 ; D. $\frac{6}{5}$.

Zadanie 15 (2pkt.). Sześcian o krawędzi długości $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}$ rzutujemy prostopadle na ustaloną płaszczyznę. Największa wartość pola powierzchni takiego rzutu jest równa

- A. $\frac{7}{9}$; B. $\frac{8}{9}$; C. 1 ; D. $\frac{10}{9}$.

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię.....

Nazwisko.....

Szkoła.....

Miejscowość.....

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
A
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.