-

-
-

Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Etap szkolny

7 grudnia 2018 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). $\left(7^{\left(3^{-1}\right)^2}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[6]{\left(\sqrt[6]{7}\right)^7} \cdot 4^{\frac{2}{3}} =$

A. $2\sqrt[3]{14}$; B. $7^{11}\left(4\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{2}{3}}$; C. $14^{\frac{2}{3}}$; D. $28^{\frac{2}{3}}$.

Zadanie 2 (2pkt.). Jeśli współrzędne punktu $P(x, y)$ spełniają każde z równań $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $y = -2(x-2)^2 + m$ dla dokładnie trzech różnych par (x, y), to

A. $m = 2$; B. $m \in (1,2)$; C. $m \in (0,1)$; D. $m \in \langle 0, 2)$.

Zadanie 3 (2pkt.). Suma czwartych potęg pierwiastków rzeczywistych równania $x^4 - 11x^2 + 4 = 0$ jest równa

A. 148; B. 184; C. 212; D. 226.

Zadanie 4 (2pkt.). Miejscowości A, B i C rozmieszczone są wzdłuż prostej drogi w podanej kolejności. Pojazdy X, Y i Z poruszają się ruchem jednostajnym odpowiednio z prędkościami $v, 2v$ i $3v$. Wszystkie trzy pojazdy zaczynają jechać w tym samym czasie. Pojazd Y rusza z miejscowości A w kierunku C, pojazd Z rusza z miejscowości B w kierunku C i pojazd X z miejscowości C w kierunku A. Pojazd Z po spotkaniu pojazdu X zawraca i jedzie w kierunku A, spotykając pojazd Y w połowie drogi pomiędzy A i B. Długość drogi AC jest równa 56km. Wynika stąd, że odległość i z A do B jest równa

A. 30km; B. 36km; C. 42km; D. 48km.

Zadanie 5 (2pkt.). Ciąg (a_n) spełnia warunki:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \text{ i } a_n = a_{n-2} - a_{n-4} + n,$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n \geq 5$. Wtedy

A. $a_{2017} = 2017$; B. $a_{2018} = 2018$; C. $a_{2017} < a_{2018}$; D. $a_{2017} > a_{2018}$.

Zadanie 6 (2pkt.). Liczba wszystkich uporządkowanych par (a, b) liczb całkowitych dodatnich, dla których $ab \leq 121$, jest równa

A. 242; B. 605; C. 726; D. 121^2.

Zadanie 7 (2pkt.). Liczby całkowite p i q, mniejsze od 30, spełniają warunek $\log_{\frac{2p}{q}} 9 = \log_{\frac{5p}{q}} 27$. Wynika stąd, że $p + q =$

A. 7; B. 23; C. 33; D. 36.

Zadanie 8 (2pkt.). Równanie $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 - 1 = 0$ ma

A. 0 rozwiązań; B. 1 rozwiązanie;
C. 2 rozwiązania; D. nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 9 (2pkt.). Wielomian $ax^{2019} - x^{2018} + b$ jest podzielny przez dwumian $x^2 - 1$. Wynika stąd, że

A. $a = b = 1$; B. $a = b = -1$; C. $a = b = 2$; D. $a^2 + b^2 = 1$.

Zadanie 10 (2pkt.). Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 i 4. Okrąg o promieniu r jest styczny do prostych zawierających przyprostokątne tego trójkąta i jest styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na tym trójkącie. Wtedy $r =$

A. 0,5; B. 1; C. 1,5; D. 2.

Zadanie 11 (2pkt.). W prostokącie *ABCD* punkty *E* i *F* (różne od wierzchołków prostokąta *ABCD*) leżą odpowiednio na bokach *AB* i *BC*. Pola trójkątów $\Delta EBF, \Delta AED$ i ΔDFC są odpowiednio równe 3, 4 i 5. Wynika stąd, że pole trójkąta ΔDEF jest równe

A. 4; B. 8; C. 10; D. 13.

Zadanie 12 (2pkt.). W czworościanie *ABCD* dane są długości krawędzi $AD = BC = 28$, $AC = BD = 44, AB = CD = 52$. Punkty *M* i *N* są odpowiednio środkami krawędzi *AB* i *CD*. Wtedy długość odcinka *MN* jest równa

A. $2\sqrt{2}$; B. $5\sqrt{2}$; C. $10\sqrt{2}$; D. $15\sqrt{2}$.

Zadania otwarte

Zadanie 13 (6 pkt.). W pewnym banku kapitalizacja odsetek następuje na koniec każdego kwartału i jednocześnie na koniec każdego kwartału kwartalna stopa procentowa wzrasta o 1 punkt procentowy. Niech *x*% oznacza stopę procentową w pierwszym kwartale. Niech *f* oznacza funkcję zmiennej *x* wyrażającą stosunek kwoty odebranej z banku po roku oszczędzania do kwoty złożonej w banku na początku roku.

a) Zapisz wzór funkcji f.

b) Wyznacz *x*, jeśli $10^8 f(x-100) = 120$ i *x* jest liczbą całkowitą.

Zadanie 14 (8 pkt.). Dane jest równanie $(4m-1)x^2 - (4m-1)x + m - 1 = 0$. Dla jakich wartości parametru *m* równanie ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że

a) spełniona jest nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{11}{2}$?

b) wyrażenie $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ jest liczbą całkowitą, jeśli *m* jest liczbą całkowitą?

Zadanie 15 (6 pkt.). W trójkącie ostrokątnym *ABC* dane są długości boków $AB = c$, $BC = a, AC = b$. Punkt *P* jest położony wewnątrz trójkąta *ABC* w taki sposób, że $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA| = 120^0$. Wyznacz sumę kwadratów promieni okręgów opisanych na trójkątach $\Delta APB, \Delta BPC, \Delta CPA$.

Zadanie 16 (6 pkt.). Z cylindrycznego ustawionego pionowo naczynia pełnego wody zdjęto wieko o powierzchni 48π. Następnie zanurzono do niego naroże sześcianu w taki sposób, że przekątna sześcianu, której końcem jest wierzchołek naroża zanurzonego do wody leży na prostej zawierającej oś obrotu cylindrycznego naczynia (naroże sześcianu opiera się na brzegu naczynia). Oblicz objętość wody, która wylała się z cylindrycznego naczynia.
Uwaga. Zakładamy, że woda wylała się tylko i wyłącznie na skutek zanurzenia części sześcianu.

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.
Imię………………………………………………………………………………………..
Nazwisko……………………………………………………………………………………..
Szkoła………………………………………………………………………………………
Miejscowość…………………………………………………………………………..

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
~~**A**~~
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**