-

-
-

Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych
Etap szkolny
8 grudnia 2017 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). Jeśli $\sqrt[3]{38+x\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, to $x=$

A. 5; B. 17; C. 24; D. 94.

Zadanie 2 (2pkt.). Jeśli współrzędne punktu $P(x,y)$ spełniają równanie $(x^2+y^2-2y)(x+y)=0$ i $x^2+y^2>0$, to punkt *P* nie jest punktem ćwiartki

A. I; B. II; C. III; D. IV.

Zadanie 3 (2pkt.). Iloczyn pierwiastków rzeczywistych równania $x^4-\sqrt{3}x^2-6=0$ jest równy

A. -6; B. 6; C. $2\sqrt{3}$; D. $-2\sqrt{3}$.

Zadanie 4 (2pkt.). W trójkącie ostrokątnym *ABC* wysokość *AH* jest równa środkowej *BM*. Sinus kąta *MBC* jest równy

A. $\frac{1}{3}$; B. $\frac{5}{12}$; C. $\frac{1}{2}$; D. $\frac{2}{3}$.

Zadanie 5 (2pkt.). Na pewnej płaszczyźnie odległość punktów *A* i *B* jest równa $a+b$. Liczba wszystkich prostych odległych od punktu A o *a*, natomiast od drugiego punktu o *b* jest równa

A. 2; B. 3; C. 5; D. 6.

Zadanie 6 (2pkt.). Suma *n* (gdzie *n* jest liczbą całkowitą, dodatnią) początkowych wyrazów pewnego ciągu (a_n) jest równa kwadratowi liczby sumowanych wyrazów tego ciągu powiększonemu o liczbę $2n$. Symbol $reszta(k,l)$ oznacza resztę z dzielenia liczby całkowitej *k* przez liczbę całkowitą *l* (przyjmujemy, że $reszta(k,l)\in\{0,1,\ldots,l-1\}$). Wtedy dla każdej liczby całkowitej dodatniej *n*, $reszta(a_n,4)$ jest równa

A. 1 lub 3; B. 2 lub 3; C. 1 lub 2; D. 0 lub 1 lub 2.

Zadanie 7 (2pkt.). Zbiorem wartości funkcji $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ jest zbiór

A. $(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$; B. $\langle -1,+\infty)$; C. $(-\infty,1\rangle$; D. $\langle -1,1)$.

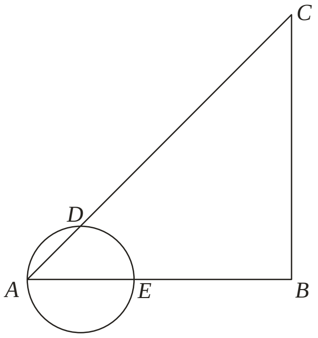
Zadanie 8 (2pkt.). Rozwiązaniem równania $\sin^2(\pi x)+(\cos(\pi x)-1)^2=0$ jest

A. każda liczba całkowita; B. każda liczba parzysta;
C. każda liczba nieparzysta; D. każda liczna naturalna.

Zadanie 9 (2pkt.). Reszta z dzielenia wielomianu $x^{2018}-x^{2017}-12$ przez dwumian x^3-x jest równa

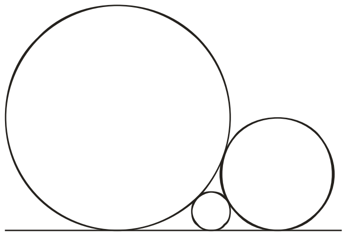
A. -12; B. $x-12$; C. x^2-x-12; D. x^3-12.

Zadanie 10 (2pkt.). W prostokątnym trójkącie równoramiennym przeciwprostokątna *AC* ma długość $5\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu 1 ma środek na przyprostokątnej *AB*. Okrąg ten przechodzi przez wierzchołek *A* i przez punkty *E* oraz *D* leżące odpowiednio na przyprostokątnej *AB* i przeciwprostokątnej *AC*. Pole trójkąta *AED* jest równe



A. 1; B. $\sqrt{2}$; C. $\frac{5}{4}$; D $\frac{11}{25}$.

Zadanie 11 (2pkt.). Każde dwa z trzech okręgów są zewnętrznie styczne, a każdy z nich jest styczny do tej samej prostej. Niech (a, b, c) oznacza malejący ciąg o wyrazach równych długości promieni tych okręgów. Wtedy ciąg ten może być równy



A. $\left(36, 16, \frac{28}{5}\right)$; B. $\left(36, 27, \frac{31}{4}\right)$; C. $(36, 9, 4)$; D. $(48, 12, 5)$.

Zadanie 12 (2pkt.). Prostopadłościan o powierzchni $240+88\sqrt{3}$ został wpisany w kulę o promieniu *r*. Suma długości wszystkich dwunastu krawędzi tego prostopadłościanu jest równa $88+8\sqrt{3}$. Wtedy $r =$

A. 8; B. $5\sqrt{3}$; C. $4\sqrt{5}$; D. $6\sqrt{2}$.

Zadania otwarte

Zadanie 13 (7 pkt.). Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe $a = \overline{xyz}$ (ten zapis oznacza, że *x* jest cyfrą setek, *y* cyfrą dziesiątek, a *z* cyfrą jedności) których cyfra setek jest trzy razy mniejsza od sumy dwóch pozostałych cyfr i różnica $a - \overline{xzy}$ jest nieujemna oraz podzielna przez 81.

Zadanie 14 (6 pkt.). Wyznacz wielomian $f(x)$ spełniający dla każdej liczby rzeczywistej *x* warunek $f(x-1) + 2f(x+1) = 6x^2 - 5x + 18$.

Zadanie 15 (7 pkt.). W trójkącie ostrokątnym *ABC* odcinek *BD* jest wysokością tego trójkąta, natomiast odcinek *BE* jest jego środkową. Wyznacz kosinus kąta *EBD* znając miary jego kątów $\alpha = |\angle BAC|$, $\beta = |\angle ABC|$ i $\gamma = |\angle ACB|$.

Zadanie 16 (6 pkt.). W stożek S_1 o kącie rozwarcia 60^0 wpisano kulę, następnie przecięto go płaszczyzną styczną do wpisanej kuli i równoległą do podstawy odcinając w ten sposób od stożka S_1 mniejszy stożek S_2. W stożek S_2 wpisano kulę, następnie przecięto go płaszczyzną styczną do wpisanej kuli i równoległą do podstawy odcinając w ten sposób od stożka S_2 mniejszy stożek S_3. Postępowanie to kontynuowano nieskończenie wiele razy. Jaki był promień kuli wpisanej w stożek S_1 jeśli suma objętości wszystkich wpisanych kul jest równa 3042π?

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię……………………………………………………………………………………..

Nazwisko……………………………………………………………………………..

Szkoła…………………………………………………………………………………

Miejscowość…………………………………………………………………………..

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
~~**A**~~
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**