-
-

Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Etap szkolny

11 grudnia 2015 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). Liczbą odwrotną do liczby $\left(\sqrt{11}+1\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$ jest

A. $\frac{\sqrt{55}+\sqrt{33}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{20}$; B. $\frac{\sqrt{55}-\sqrt{33}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{20}$;

C. $\frac{\sqrt{55}-\sqrt{33}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{20}$; D. $\frac{\sqrt{55}+\sqrt{33}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{20}$.

Zadanie 2 (2pkt.). Wiadomo, że $x<2y-5$ oraz $y\le 3x+1$. Wynika stąd, że $5x$ jest większe od

A. 2; B. 4; C. 6; D. 8.

Zadanie 3 (2pkt.). Suma odwrotności pierwiastków równania $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+1}=1$ jest równa

A. -3; B. 3; C. -2; D. 2.

Zadanie 4 (2pkt.). Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x)=\log_{\frac{1}{6}}\left(x^2-64\right)$. Nierówność

$f(x)+\frac{1}{f(x)}\le f(10)$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

A. $x\in(-\infty,-8)\cup(8,+\infty)$; B. $x\in\left(-\infty,-\sqrt{65}\right)\cup\left(\sqrt{65},+\infty\right)$;

C. $x\in\left(-\infty,-\sqrt{65}\right\rangle\cup\left\langle\sqrt{65},+\infty\right)$; D. $x\in\left(-\sqrt{65},\sqrt{65}\right)$.

Zadanie 5 (2pkt.). Odległość punktów *A* i *B* jest równa 7. Liczba wszystkich prostych odległych od jednego z tych punktów o 3, a od drugiego o 4 jest równa

A. 2; B. 3; C. 5; D. 6.

Zadanie 6 (2pkt.). Liczba wszystkich liczb 10-cyfrowych, których suma cyfr jest równa 3, jest równa

A. 53; B. 54; C. 55; D. 56.

Zadanie 7 (2pkt.). Równanie $x^5+x^3+1=0$ ma

A. 5 rozwiązań; B. 3 rozwiązania; C. 1 rozwiązanie; D. 0 rozwiązań.

Zadanie 8 (2pkt.). Funkcja *f* spełnia, dla każdej liczby rzeczywistej $x\ne 0$, warunek $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3$. Wtedy $f(-2)=$

A. $\frac{1}{4}$; B. $\frac{11}{4}$; C. $\frac{111}{4}$; D. $\frac{1111}{4}$.

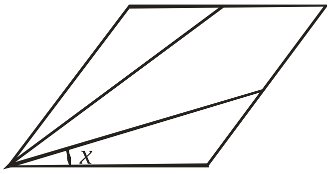
Zadanie 9 (2pkt.). Jeśli dla kątów ostrych α i β zachodzą związki $\sin\alpha+\sin\beta=1{,}5$ i $\cos\alpha+\cos\beta=1$, to

A. $\cos(\alpha+\beta)=1$; B. $\cos(\alpha-\beta)=1$; C. $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{8}$; D. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{8}$.

Zadanie 10 (2pkt.). Dwie równoległe cięciwy koła o długościach 5 i 7 są oddalone o 3 i leżą po przeciwnych stronach środka tego koła. Cięciwa położona w równej odległości od tych dwóch cięciw ma długość

A. 6; B. $3\sqrt{5}$; C. $\sqrt{46}$; D. $\sqrt{65}$.

Zadanie 11 (2pkt.). Romb o kącie ostrym $60°$ podzielono na 3 części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Wówczas



A. $\sin x = \sin 20°$; B. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{6}$; C. $\sin x = \frac{\sqrt{57}}{19}$; D. $\sin x = \frac{\sqrt{19}}{7}$.

Zadanie 12 (2pkt.). W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi. Objętość tego ostrosłupa jest równa $9\sqrt{2}$. Wynika stąd, że pole jego podstawy jest równe

A. $9\sqrt{3}$; B. $12\sqrt{3}$; C. $12\sqrt{2}$; D. $15\sqrt{2}$.

Zadania otwarte

Zadanie 13 (7 pkt.). Wyznacz wszystkie liczby czterocyfrowe, które powiększone o sumę swoich cyfr są równe 2015.

Zadanie 14 (6 pkt.). Dla jakich wartości parametru *k* wielomiany $x^2 + (4-k)x - 2k - 3$ i $x^2 - 2x - k - 9$ mają dokładnie jeden wspólny pierwiastek. Znajdź ten pierwiastek i pozostałe pierwiastki obu wielomianów.

Zadanie 15 (6 pkt.). Wyznacz miary kątów trójkąta, jeśli miary te są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, a długości boków tego trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Zadanie 16 (7 pkt.). Dany jest ostrosłup *ABCS*, którego podstawą jest trójkąt równoboczny *ABC* o boku $a = 6$. Krawędź boczna *SA* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i jej długość wynosi 3. Niech *M* będzie punktem krawędzi *AB* i niech $|AM| = x$. Przez punkt *M* prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi *AB*. Niech *P* będzie figurą będącą przekrojem ostrosłupa tą płaszczyzną.
a) Dla jakich *x* przekrój *P* jest czworokątem?
a) W przypadku, gdy *P* jest czworokątem, oblicz w zależności od *x* długość przekątnej czworokąta poprowadzonej z punktu *M*. Dla jakich *x* długość tej przekątnej jest najmniejsza? Ile wynosi ta najmniejsza długość?

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię…………………………………………………………………………………………..

Nazwisko……………………………………………………………………………………..

Szkoła…………………………………………………………………………………………

Miejscowość…………………………………………………………………………………..

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
~~**A**~~
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**