



Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych
Etap szkolny
9 stycznia 2013 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). Suma liczb $\sqrt{91+40\sqrt{3}}$ i $\sqrt{91-40\sqrt{3}}$ jest równa

- A. $10\sqrt{3}$; B. 8; C. $\sqrt{182}$; D. 59.

Zadanie 2 (2pkt.). Prosta o równaniu $y = -x$ dzieli odcinek o końcach $(a,0)$ i $(0,b)$, $a > 0$ i $b < 0$, na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku

- A. 1:1; B. $a:b$; C. $a:(-b)$; D. $a^2:b^2$.

Zadanie 3 (2pkt.). Liczba wierzchołków wielokąta wypukłego jest większa od 3 i przy dzieleniu przez 4 daje resztę równą 3. Wtedy liczba przekątnych tego wielokąta

- A. przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2;
B. przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4;
C. jest liczbą nieparzystą;
D. jest liczbą parzystą.

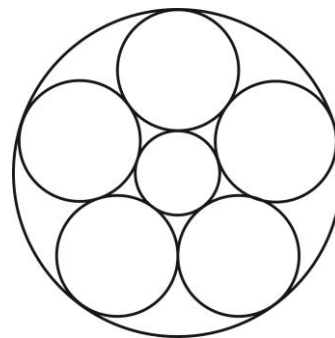
Zadanie 4 (2pkt.). Liczby odwrotne do pierwiastków równania $4x^2 + 3x - 9 = 0$ są pierwiastkami równania

- A. $4x^2 + 3x + 9 = 0$; B. $9x^2 + 3x - 4 = 0$;
C. $9x^2 - 3x - 4 = 0$; D. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = 0$.

Zadanie 5 (2pkt.). W pięciokącie $ABCDE$, $|AE| = 5$, $|BC| = 3$, kąty przy wierzchołkach A i B są proste, a punkt D leży na odcinkach AC i BE . Odległość punktu D od boku AB jest równa

- A. 1,5; B. 1,875; C. 2,25; D. 2,625;

Zadanie 6 (2pkt.). Danych jest pięć okręgów o promieniu długości r ułożonych tak jak na rysunku, z których każde dwa są zewnętrznie styczne lub rozłączne. Dorysowano dwa inne okręgi w taki sposób, że jeden z tych okręgów jest wewnętrznie styczny, a drugi zewnętrznie styczny do danych okręgów. Suma długości promieni dorysowanych okręgów jest równa.



- A. $2r \cos 54^\circ$; B. $r \cos 54^\circ$; C. $2 \frac{r}{\cos 54^\circ}$; D. $\frac{r}{\cos 54^\circ}$.

Zadanie 7 (2pkt.). Siedemnaście liczb naturalnych wpisano kolejno jedna za drugą do tabelki:

5																2
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

Na pierwszym miejscu stoi liczba 5, a na ostatnim 2. Suma każdego kolejnych trzech liczb jest równa 11. Liczba stojąca na środkowym polu jest równa

- A. 2; B. 5; C. 1; D. 4.

Zadanie 8 (2pkt.). Dany jest wielomian $W(x)$ stopnia trzeciego. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $W(x) > 0$ jest suma przedziałów $(-5, 1) \cup (4, +\infty)$. Wynika stąd, że zbiorem rozwiązań nierówności $W(2 - |x|) < 0$ jest

- A. $(-3, 3) \cup (7, +\infty)$; B. $(-\infty, -7) \cup (-1, 1) \cup (7, +\infty)$;
 C. $(-\infty, -4) \cup (-2, 2) \cup (4, +\infty)$; D. $(-\infty, -5) \cup (-1, 1) \cup (5, +\infty)$.

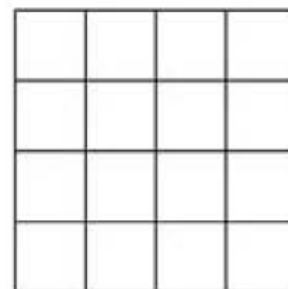
Zadanie 9 (2pkt.). Iloczyn 100 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie pierwszym równym 1 i ilorazie równym 2 wynosi

- A. 2^{99} ; B. 2^{100} ; C. 2^{4950} ; D. 2^{5050} .

Zadanie 10 (2pkt.). Równanie $\sin^5 x \cos^5 x = 1$

- A. ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(0, \pi)$;
 B. ma jeden pierwiastek w każdym przedziale postaci $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{C}$;
 C. ma jeden pierwiastek w każdym przedziale postaci $(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{C}$;
 D. nie ma żadnego pierwiastka.

Zadanie 11 (2pkt.). W gołębniku znajduje się 16 gniazd umieszczonych tak jak na rysunku. W jednym gnieździe może przebywać co najwyżej jeden ptak. Liczba wyborów 4 gniazd w tym gołębniku, z których 2 będą przeznaczone dla dwóch gołębic i 2 dla dwóch gołębi (istotny jest tylko wybór gniazda dla gołębia lub gołębic, a nie to któremu ptakowi danej płci zostało ono przydzielone) tak, aby ptaki tej samej płci nie siedziały na tym samym poziomie, ani nie siedziały w gniazdach umieszczonych w tej samej kolumnie jest równa



- A. 3960; B. 4032; C. 4463; D. 5184.

Zadanie 12 (2pkt.). W zamkniętym naczyniu w kształcie walca są umieszczone na dwóch poziomach po 4 kule o promieniu 1. Każda z tych kul jest styczna do dwóch kul tego samego poziomu, dwóch kul drugiego poziomu oraz do jednej z podstaw walca i do jego powierzchni bocznej. Wysokość walca jest równa

- A. $\sqrt[4]{8} + 2$; B. 4; C. $2 + \sqrt{3}$; D. $\sqrt[4]{3} + 2$.

Zadania otwarte

Zadanie 13 (7 pkt.). Cena towaru została najpierw obniżona o $p\%$, a potem wzrosła o $q\%$. Okazało się, że ostateczną cenę towaru można było otrzymać zmniejszając początkową cenę o $(q-p)\%$.

- a) Wyznacz q jako funkcję p .
- b) Wyznacz p i q , wiedząc, że $q-p=10$.

Zadanie 14 (7 pkt.). Niech x_1, x_2, x_3 będą różnymi pierwiastkami wielomianu

$$W(x) = (m+3)x^3 - (m-5)x^2 - (m-5)x + m + 3.$$

Dla jakich m wyrażenie $(m+3)^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6)$ przyjmuje najmniejszą wartość?

Zadanie 15 (7 pkt.). W ciągu (a_n) kolejne różnice sąsiednich wyrazów

$a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$ są odpowiednio równe kolejnym liczbom naturalnym, nieparzystym $1, 3, \dots, 2n-3, \dots$. Zapisz sumę $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ w postaci wielomianu, wiedząc

że $a_1 = -\frac{1}{6}$.

Uwaga. W rozwiązaniu możesz wykorzystać wzór $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią.

Zadanie 16 (5 pkt.). Wykaż, że każdy punkt leżący wewnątrz czworokąta wypukłego, którego każdy bok ma długość mniejszą od a , jest odległy od pewnego wierzchołka tego

czworokąta o mniej niż $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię.....

Nazwisko.....

Szkoła.....

Miejscowość.....

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
A
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.