Matematyka Moja Pasja

Edycja 2018/2019

Treści zadań konkursowych wraz ze szkicami rozwiązań.

Łódź 2019

Niniejsze opracowanie zawiera treści zadań z edycji 2018/2019 konkursu Matematyka Moja Pasja. W roku szkolnym 2018/2019 konkurs w kategorii dla gimnazjów (od roku szk. 2017/2018 także w kategorii dla szkół podstawowych) odbył się po raz dziewiąty, a w kategorii dla szkół ponadgimnazjalnych po raz ósmy.

W obu kategoriach zawody są trzyetapowe. I etap odbył się w macierzystych szkołach. Zawody finałowe odbyły się 5 i 6 lutego 2019 roku w budynkach Wydziału Matematyki i Informatyki oraz Publicznego Liceum Uniwersytetu Łódzkiego im. Sprawiedliwych wśród Narodów Świata. Uroczysta Gala połączona wręczenie nagród odbyła się 27 marca 2019 roku w auli Wydziału Matematyki i Informatyki przy ul. Banacha 22.

Do tegorocznej edycji konkursu MMP zgłosiło się **1991** uczestników (**w kategorii szkół ponadgimnazjalnych**: **1078** uczniów z **52** szkół, **w kategorii gimnazjów i szkół podstawowych**: **354** uczniów z **53 gimnazjów** oraz **559** uczniów **klas siódmych i ósmych** z **75 szkół podstawowych**).

Wśród zadań konkursowych znajdują się zadania zamknięte i zadania otwarte. Do każdego z zadań zamkniętych podane są cztery odpowiedzi (A, B, C i D). Dokładnie jedna z nich jest prawdziwa.

Mam nadzieję, że przedstawiony materiał okaże się interesujący i będzie służył pomocą tym pasjonatom matematyki, którzy chcą pogłębiać swoją wiedzę i kształcić umiejętności.

Życzę owocnej pracy

Andrzej Rychlewicz
andrzej.rychlewicz@wmii.uni.lodz.pl

Spis treści

I. Konkurs dla gimnazjalistów i uczniów klas VII, VIII szkół podstawowych.

1. Etap szkolny

a) Zawody pierwszego stopnia. Zadania zamknięte.

Zadanie 1 (2pkt.). $\frac{\left(2^{3^2}\right)^3}{\left(2^{2^3}\right)^2} =$

A. 2^8; B. 2^9; C. 2^{10}; D. 2^{11}.

Zadanie 2 (2pkt.). Niech n oznacza liczbę wszystkich liczb trzycyfrowych, które jednocześnie przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3, przy dzieleniu przez 7 dają resztę 4, a przy dzieleniu przez 11 dają resztę 5. Wtedy $n =$

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

Zadanie 3 (2pkt.). Liczby a, b, c, d, e, f, g, h są różnymi liczbami wybranymi spośród $-11, -5, -3, -1, 4, 6, 8, 10$. Najmniejsza wartość wyrażenia

$$(a + b + c + d)^4 + (e + f + g + h)^4$$

jest równa

A. 502; B. 512; C. 524; D. 536.

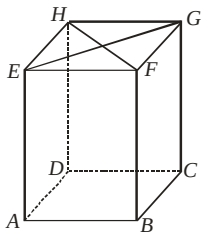
Zadanie 4 (2pkt.) Podczas gry w bilard wykorzystuje się prawo mówiące o tym, że kąt padania jest równy kątowi odbicia. Dane są odległości $AB = 30, CD = 45, AD = 135$. Aby kula znajdująca się w punkcie *B* odbiła się od bandy *AD* i trafiła w punkt *C*, należy ją tak uderzyć, aby punkt odbicia na bandzie był oddalony od punktu *A* o

A. 54; B. 60; C. 64; D. 68.

Zadanie 5 (2pkt.). W urnie są kule tylko białe i czarne. Po wyjęciu z urny 19 kul białych i 35% kul czarnych stosunek liczby kul białych do czarnych jest równy $\frac{7}{13}$. Wynika stąd, że przed wyjęciem kul z urny liczba kul czarnych była liczbą podzielną przez

A. 3; B. 5; C. 7; D. 11.

Zadanie 6 (2 pkt.). Kartonowy prostopadłościan *ABCDEFGH* o podstawie kwadratowej o krawędzi podstawy długości 3 i wysokości długości 7 rozcięto wzdłuż krawędzi bocznych *AE*, *BF*, *CG* i *DH* oraz wzdłuż przekątnych *EG* i *HF* górnej podstawy. Następnie otrzymaną powierzchnię położono na płaszczyźnie. Kwadrat o najmniejszym polu zawierający tę powierzchnię ma bok długości



A. 10; B. $10\sqrt{2}$; C. $10\sqrt{3}$; D. $10\sqrt{5}$.

Zadanie 7 (2pkt.). Janek ma popsuty zegarek, który „chodzi” ze stałą prędkością, ale odmierza niewłaściwy czas. O godzinie 9.30 zegarek Janka pokazywał godzinę 9.52. O godzinie 11.10 pokazywał godzinę 11.52. Zegarek Janka pokazywał godzinę 17.52 o godzinie

A. 16.10; B. 16.12; C. 16.20; D. 16.22.

Zadanie 8 (2pkt.). Używając cyfr $0, 1, 2, 3$ można utworzyć następującą liczbę różnych liczb trzycyfrowych o dokładnie dwóch różnych cyfrach

A. 25; B. 27; C. 32; D. 40.

Zadanie 9 (2pkt.). Wykonany z papieru trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5cm i 12 cm zgięto w taki sposób, że końce przeciwprostokątnej pokryły się. Długość odcinka, będącego krawędzią zgięcia jest równa

A. $2\frac{17}{24}$ cm; B. $2\frac{19}{24}$ cm; C. $2\frac{21}{24}$ cm; D. $2\frac{23}{24}$ cm.

Zadanie 10 (2pkt.) Dany jest siedmiokąt foremny (wszystkie jego boki są jednakowe i wszystkie jego kąty są jednakowe). Liczba wszystkich trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami tego wielokąta i bokach nieleżących na bokach tego wielokąta jest równa

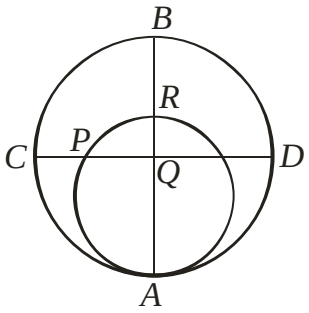
A. 7; B. 14; C. 21; D. 28.

Zadanie 11(2pkt.). Marek przebiegł trzy okrążenia bieżni lekkoatletycznej. Pierwsze z prędkością 20km/h, drugie z prędkością 18 km/h i trzecie prędkością 16 km/h. Średnia prędkość jego biegu była

A. równa 18km/h; B. mniejsza od 18km/h;
C. większa od 18km/h i mniejsza od 19km/h; D. większa od 19km/h.

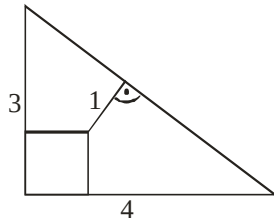
Zadanie 12 (2pkt). Dwa okręgi są styczne w punkcie A. Odcinki AB i CD są prostopadłymi średnicami większego okręgu, a punkty P i R są punktami wspólnymi tych średnic i mniejszego okręgu. Dane są długości $BR = 5$ i $PC = 3$. Promień mniejszego okręgu jest równy

A. 6; B. 6,5; C. 7; D. 7,5.



b) Zawody pierwszego stopnia. Zadania otwarte.

Zadanie 13 (4 pkt). W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 umieszczono kwadrat w taki sposób, że jeden z jego wierzchołków jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego, a dwa boki leżą na przyprostokątnych. Odcinek prostopadły do przeciwprostokątnej, łączący tę przeciwprostokątną z wierzchołkiem kwadratu leżącym wewnątrz trójkąta ma długość 1. Oblicz długość boku kwadratu.

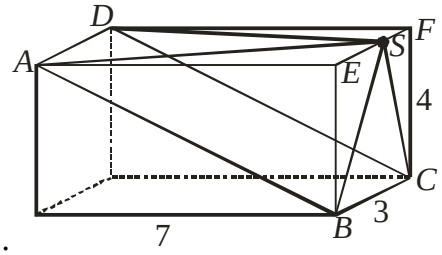


Zadanie 14 (5pkt.). W pewnej szkole podstawowej 60% uczniów lubi grać w piłkę, a 40% tej grupy uczniów lubi grać w tenisa, natomiast w tenisa lubi grać 30% uczniów całej szkoły. Jaki procent uczniów nie lubiących grać w tenisa, lubi grać w piłkę?

Zadanie 15 (5 pkt.). Wyznacz wszystkie liczby trzycyfrowe $(x5z)_{10}$, które są o 693 większe od liczby $(z5x)_{10}$.

Zadanie 16 (6 pkt.). Jan swoim starym samochodem podwoził znajomego na pociąg. Przez pierwszą godzinę jechał ze średnią prędkością 35km/godz. Po tym czasie zorientował, że jadąc dalej z taką samą prędkością spóźni się o jedną godzinę. Przyśpieszył do prędkości 50km/godz. Ostatecznie przybył dwa kwadranse przed czasem. Ile kilometrów Jan wiózł swojego znajomego na pociąg?

Zadanie 17 (6 pkt.). W prostopadłościanie o krawędziach podstawy długości 7 i 3 i wysokości 4 obrano punkt *S* na krawędzi *EF* w taki sposób, że $ES = 2SF$. Oblicz objętość ostrosłupa czworokątnego *ABCDS*.



c) Zawody pierwszego stopnia. Schemat odpowiedzi i szkice rozwiązań zadań zamkniętych.

Schemat odpowiedzi

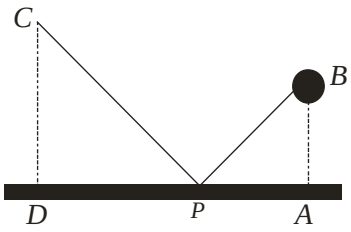
	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
Odp.	D	A	B	A	B	B	A	B	A	A	B	B

Zadanie 1. Obliczmy $\frac{\left(2^{3^2}\right)^3}{\left(2^{2^3}\right)^2} = \frac{2^{3^2\cdot 3}}{2^{2^3\cdot 2}} = \frac{2^{3^3}}{2^{2^4}} = 2^{27-16} = 2^{11}$.

Zadanie 2. Niech *x* będzie liczbą, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 i przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4 (np. $x = 18$). Liczby $x + 5, x + 2\cdot 5, x + 3\cdot 5, \ldots$ dają przy dzieleniu przez 5 resztę 3, a liczby $x + 7, x + 2\cdot 7, x + 3\cdot 7, \ldots$ dają przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4. Ponieważ liczby 5 i 7 są względnie pierwsze, to najmniejszą liczbą całkowitą, większą od *x*, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 i przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4, jest liczba postaci $x + 7\cdot 5$. Zatem kolejne liczby, które przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 i przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4, różnią się o 35. Rozumując analogicznie wnioskujemy, że kolejne liczby, które przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3 i przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4, i przy dzieleniu przez 11 dają resztę 5, różnią się o $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Liczb trzycyfrowych jest $999 - 99 = 900$, a więc istnieją tylko 2 liczby spełniające warunki zadania.

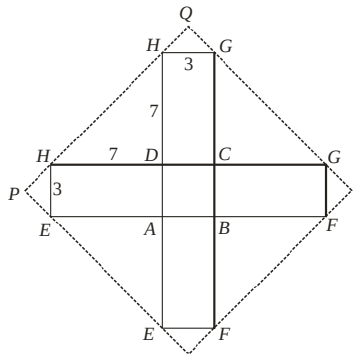
Zadanie 3. Liczby a, b, c, d, e, f, g, h można tak dobrać, aby zachodziły następujące równości $x = a + b + c + d = 10 + 8 - 11 - 3 = 4$ i $y = e + f + g + h = 4 + 6 - 5 - 1 = 4$, Wtedy $x^4 + y^4 = 4^4 + 4^4 = 512$. Gdyby $x < y$, to wtedy $y \geq 5$, a więc można oszacować $y^4 \geq 5^4 = 625 > 512$. Wartość 512 jest najmniejsza, jaką może przyjąć rozważane wyrażenie.

Zadanie 4. Trójkąty *ABP* i *DCP* są podobne.
Stąd $AP = \frac{30}{45}DP = \frac{2}{3}DP$, a więc $AP = \frac{2}{5}AD = 54$.



Zadanie 5. *I. Sposób*. Z urny wyjęto 35% kul czarnych, a więc wyjęto $\frac{7}{20}$ tych kul. Ponieważ liczba wyjętych kul jest liczbą całkowitą, więc liczba 20 dzieli liczbę kul czarnych. Wynika stąd, że liczba 5 dzieli liczbę kul czarnych.
II. Sposób. Oznaczmy liczbę kul białych i liczbę kul czarnych znajdujących się w urnie odpowiednio przez *b* i *c*. Wtedy $\frac{b-19}{c-\frac{7}{20}c} = \frac{7}{13}$. Stąd $c = 20\frac{b-19}{7}$. Wnioskujemy, że liczba 5 dzieli liczbę *c*. Ponieważ *b* nie jest wyznaczona jednoznacznie, to liczba całkowita $20\frac{b-19}{7}$ nie musi być podzielna przez 3, 7, 11.

Zadanie 6. Bok kwadratu o najmniejszym polu ma długość $PQ = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} + 7\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

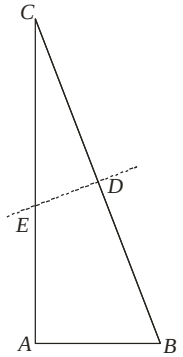


Zadanie 7. W czasie gdy zegarek Janka odmierzył 2 godziny (od 9.52 do 11.52), to prawidłowy czas zmienił się o 2 godziny bez 20 minut (od 9.30 do 11.10). Zatem jeśli Zegarek Janka odmierzył 8 godzin (od 9.52 do 17.52) to wtedy prawidłowy czas zmienił się o 8 godzin bez $4 \cdot 20$minut, a więc bez 1 godziny i 20 minut.
Prawidłowy czas to $9.30 + 8 - 1.20 = 16.10$.

Zadanie 8. Jeśli cyfra setek jest równa 1, to wtedy są dwie możliwości:
1) Wśród pozostałych cyfr jest 1. Wtedy można umieścić ją na 2 miejscach, a na kolejne miejsce można na 3 sposoby wybrać cyfrę spośród $\{0, 2, 3\}$. Zatem wszystkich takich możliwości jest $2 \cdot 3 = 6$.
2) Wśród pozostałych cyfr nie ma jedynki. Są 3 takie możliwości $(\{00, 22,\ 33\})$.
Wszystkich liczb z cyfrą 1 jako cyfrą setek jest więc $6 + 3 = 9$.
Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić, gdy cyfra setek jest równa 2 lub 3, a więc ostatecznie jest $3 \cdot 9 = 27$ możliwości.

Zadanie 9. Niech $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm będą przyprostokątnymi trójkąta *ABC*. Krawędź zgięcia leży na symetralnej przeciwprostokątnej trójkąta tego trójkąta. Trójkąty *ABC* i *DCE* są podobne. Stąd $\frac{AB}{ED} = \frac{AC}{CD}$.

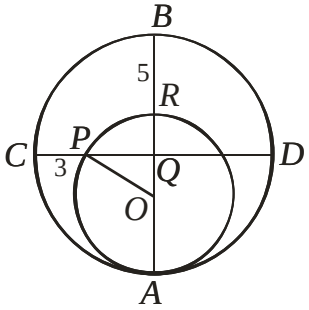
Zatem $ED = \frac{AB \cdot CD}{AC} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{5^2+12^2}}{2}}{12} = 2\frac{17}{24}$ cm.



Zadanie 10. Dla każdego wierzchołka można zbudować 3 trójkąty spełniające warunki zadania. Ponieważ jest 7 wierzchołków i każdy z nich można wybrać3 razy, to liczba wszystkich takich trójkątów jest równa $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 7 = 7$.

Zadanie 11. Niech *s* oznacza długość bieżni [w km]. Wtedy czas [w h] przebiegnięcia bieżni jest równy $\frac{s}{20}, \frac{s}{18}, \frac{s}{16}$, odpowiednio dla pierwszego, drugiego, trzeciego okrążenia. Średnia prędkość jest równa $\frac{3s}{\frac{s}{20}+\frac{s}{18}+\frac{s}{16}} = 17\frac{103}{121} < 18$ km/h.

Zadanie 12. Zauważmy, że $2x = 2r + 5$, gdzie x i r oznaczają odpowiednio promień większego i mniejszego okręgu. Rozważmy trójkąt prostokątny OPQ, gdzie O jest środkiem mniejszego okręgu. Wtedy

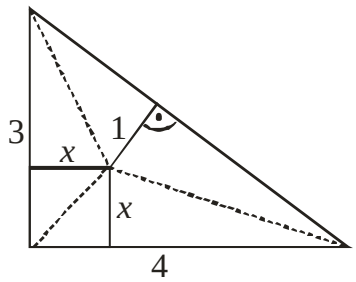


$PQ = x - 3 = r - \frac{1}{2}$, $OQ = x - r = \frac{5}{2}$ i $OP = r$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa $\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = r^2$.

Stąd $r = 6{,}5$.

Zadanie 13. Niech x długość boku kwadratu.
Przeciwprostokątna trójkąta jest równa $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Pole danego trójkąta jest sumą pól trzech trójkątów o polach $\frac{4x}{2}$, $\frac{3x}{2}$ i $\frac{5}{2}$. Otrzymujemy równanie $\frac{4x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{5}{2}=6$.
Stąd $x=1$.



Zadanie 14. Niech n oznacza liczbę wszystkich uczniów. Ponieważ 40% uczniów lubiących grać w piłkę lubi grać w tenisa, to liczba uczniów całej szkoły lubiących grać w piłkę i lubiących grać w tenisa jest równa $0{,}24n$. Wynika stąd, że liczba uczniów całej szkoły lubiących grać w piłkę i nie lubiących grać w tenisa jest równa $0{,}6n-0{,}24n=0{,}36n$. Liczba uczniów całej szkoły nie lubiących grać w tenisa jest równa $0{,}7n$. Procent uczniów nie lubiących grać w tenisa i lubiących grać w piłkę jest równy $\frac{0{,}36n}{0{,}7n}\cdot 100\%=51\frac{3}{7}\%$.

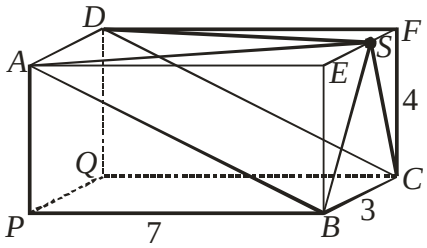
Zadanie 15. Z warunków zadania wiemy, że

$$(x5z)_{10}=693+(z5x)_{10},$$

a więc $100x+50+z=693+100z+50+x$, a stąd $x-z=7$.
Jedynymi liczbami postaci $(x5z)_{10}$, spełniającymi ten warunek są liczby 952, 851, 750.

Zadanie 16. Niech s oznacza drogę pokonaną z prędkością 50km/godz. Wtedy cała droga jest równa $s+35$. Czas potrzebny na pokonanie drogi s z prędkością 50km/godz. jest równy $\frac{s}{50}$, a czas potrzebny na pokonanie tej drogi z prędkością 35km/godz. jest równy $\frac{s}{35}$. Z warunków zadania wynika równanie $\frac{s}{35}-\frac{s}{50}=1{,}5$, którego rozwiązaniem jest $s=175$. Cała droga jest równa $175+35=210$ km.

Zadanie 17. Objętość ostrosłupa czworokątnego *ABCDS* jest równa różnicy połowy objętości całego prostopadłościanu (objętość graniastosłupa *PBAQCD* jest równa połowie objętości prostopadłościanu) i dwóch: ostrosłupów: ostrosłupa *ABES*, ostrosłupa *CDFS*. Objętość ta jest równa
$7\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\frac{2}{3}\cdot 3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\frac{1}{3}\cdot 3=28.$



2. Etap II

a) Zawody drugiego stopnia. Zadania zamknięte.

Zadanie 1 (2pkt.). Liczba zer występujących w zapisie dziesiętnym liczby $\left(10^{2^3} \cdot 10^{3^2}\right)^{2^3}$ jest równa

A. 26; B. 72; C. 96; D. 136.

Zadanie 2 (2pkt.). Mamy dokładnie dwa pudełka: pudełko A i pudełko B. W pudełku A jest kartka, na której napisano liczbę 1. Pudełko B jest puste. Jaś wielokrotnie powtarza następującą procedurę: *wyjmuje kartkę z pudełka, które nie jest puste, odkłada ją na bok, a następnie do pudełka, z którego nie wyjmował kartki wkłada inną kartkę z zapisaną liczbą o 1 większą od iloczynu 10 i liczby zapisanej na odłożonej kartce*. Jaś po raz piąty włożył kartkę do pudełka A. Trzy ostatnie cyfry (zapisane w kolejności: cyfra setek, cyfra dziesiątek, cyfra jedności) sumy liczb zapisanych na odłożonych kartkach są równe.

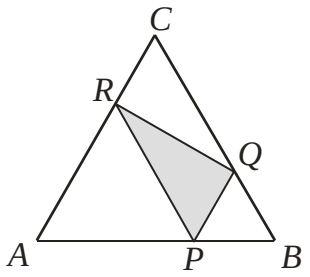
A. 7,8,9; B. 9,0,0; C. 0,1,1; D. 1,2,2.

Zadanie 3 (2pkt.). Kolejne liczby całkowite wypisano w nieskończonej tabeli (rysunek obok zawiera trzy pierwsze wiersze tabeli). Liczba wypisanych liczb w każdym wierszu jest o dwa mniejsza od liczby liczb wypisanych w następnym wierszu. Liczba zapisana w wierszu 61. i w tej samej kolumnie co liczba 134 jest równa

1
2 3 4
5 6 7 8 9

A. 3660; B. 3661; C. 3662; D. 3663.

Zadanie 4 (2pkt.). W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 1, punkty P, Q i R są położone odpowiednio na bokach AB, BC i AC w taki sposób, że każda z długości $|PB|, |QB|$ i $|RC|$ jest równa $\frac{1}{3}$. Pole trójkąta PQR jest równe.



A. $\frac{\sqrt{3}}{15}$; B. $\frac{\sqrt{3}}{16}$; C. $\frac{\sqrt{3}}{17}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Zadanie 5 (2pkt.). Siedem krów w 6 dni daje 70 miarek mleka. Liczba miarek mleka jaką daje 8 krów w 9 dni jest równa

A. 108; B. 112; C.116; D. 120.

Zadanie 6 (2pkt.). Pola trzech ścian prostopadłościanu o krawędziach długości $a < b < c$ są równe 12, 21 i 28. Wtedy $3a + 2b + c =$

A. 22; B. 24; C.26; D. 28.

Zadanie 7 (2pkt.). Liczba wszystkich liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 3 i o dwóch ostatnich cyfrach 14 (tzn. cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 4) jest równa

A. 299; B. 300; C. 301; D. 302.

Zadanie 8 (2pkt.). Liczby a, b, c i d spełniają warunek $\frac{a+b}{d+c} = \frac{c+d}{b+a}$. Np. można przyjąć, że $a = 11, b = 9, c = 14, d = 6$. Liczba możliwości wyboru czterech różnych liczb a, b, c i d, jeśli każdą z nich wybieramy spośród liczb 1, 3, 5, 7, i 9 jest równa

A. 18; B. 21; C. 24; D. 27.

Zadanie 9 (2pkt.). Marysia jedzie na rowerze z górki z prędkością 25km/h, a pod górkę jedzie z prędkością 10km/h. Marysia pokonała 30km w ciągu 90 minut. Liczba minut, podczas których Marysia jechała z górki jest równa

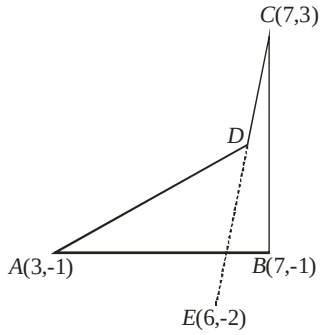
A. 50; B. 55; C. 60; D. 65.

Zadanie 10 (2pkt.). Średnia arytmetyczna 19 kolejnych najmniejszych liczb całkowitych dodatnich i liczby x jest równa $0{,}24x$. Gdybyśmy liczyli średnią arytmetyczną bez liczby x, to od $0{,}24x$ byłaby ona mniejsza o

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

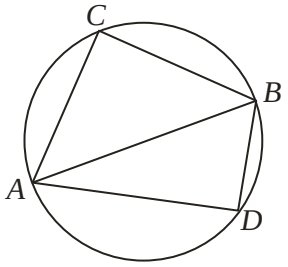
Zadanie 11 (2pkt.). Na rysunku zostały podane współrzędne trzech wierzchołków czworokąta $ABCD$ i punktu E. Punkt D jest punktem wspólnym odcinka CE i symetralnej odcinka BC. Pole czworokąta $ABCD$ jest równe

A. 4,8; B. 5; C. 5,2; D. 5,4.



Zadanie 12 (2pkt.). Równoramienny trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB jest wpisany w okrąg. Punkty C i D leżą na różnych łukach AB tego okręgu. Pole czworokąta $ADBC$ jest równe 32. Wtedy odległość punktów C i D jest równa

A. 6; B. $6\sqrt{2}$; C. 8; D. $8\sqrt{2}$.



Zadanie 13 (2pkt.). Na podwórku jest k kur i p prosiaków. Liczba nóg kur stanowi 40% liczby nóg prosiaków. Liczba wszystkich zwierząt jest nieparzysta i mniejsza od 50. Liczba wszystkich możliwych par (k, p) jest równa

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

Zadanie 14 (2pkt.). Murarz Grzegorz potrzebuje na zbudowanie ceglanego muru 11 godzin. Murarz Paweł jest w stanie samodzielnie zbudować taki mur w 12 godzin. Obaj murarze jednoczenie przystąpili do budowy muru, a ponieważ są bardzo gadatliwi, to nie pracują tak szybko jak potrafią. Rozmowy spowolniają pracę tak, że średnio każdej godziny układają łącznie o 10 cegieł mniej niż gdyby nie rozmawiali ze sobą. Mur został zbudowany w 6 godzin. Liczba cegieł zużyta na jego budowę jest równa

A. 1320; B. 1350; C. 1380; D. 1410.

Zadanie 15 (2pkt.). Utworzono prostopadłościan z siedmiu jednakowych warstw ułożonych z białych sześcianów jednostkowych. Każda z warstw składa się z czterdziestu sześcianów jednostkowych ułożonych w pięciu rzędach. Tak utworzony prostopadłościan pomalowano czerwoną farbą. Po wyschnięciu farby prostopadłościan rozłożono na sześciany jednostkowe. Liczba sześcianów jednostkowych, bez żadnej pomalowanej ściany jest równa

A. 90; B. 94; C. 98; D. 102.

b) Zawody drugiego stopnia. Schemat odpowiedzi i szkice rozwiązań zadań zamkniętych.

Schemat odpowiedzi

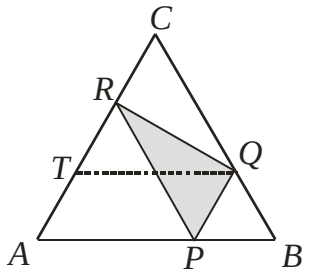
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
D	B	C	D	D	B	B	C	C	A	A	C	C	A	A

Zadanie 1. Obliczamy $\left(10^{2^3} \cdot 10^{3^2}\right)^{2^3} = (10^8 \cdot 10^9)^8 = (10^{17})^8 = 10^{136}$. Liczba zer występujących w zapisie dziesiętnym jest równa 136.

Zadanie 2. Jaś po raz piąty wkładając kartkę do pudelka A wykonuje 10 ruch. Nietrudno wywnioskować, że Jaś w *k*-tym ruchu odkłada kartkę z liczbą zapisaną za pomocą *k* cyfr równych 1 dla $k = 1, 2, \ldots, 10$. Aby wyznaczyć cyfrę jedności sumy należy zsumować 10 cyfr 1, a więc cyfra jedności sumy jest równa 0. Już teraz można stwierdzić, że poprawna jest odpowiedź B. Wyznaczenie cyfry dziesiątek i cyfry setek jest łatwym ćwiczeniem.

Zadanie 3. Zauważmy, że ostatnia liczba w 2-gim wierszu jest równa $4 = 2^2$, ostatnia liczba w 3-cim wierszu jest równa $9 = 3^2$ itd. Innymi słowy, jeśli *k* jest numerem wiersza, to wtedy ostatnią liczbą w tym wierszu jest k^2, a więc pierwszą liczbą w tym wierszu jest $(k-1)^2 + 1$ dla $k = 2, 3, 4, \ldots$Liczba 134 jest większa od $122 = 11^2 + 1$ i mniejsza od liczby $144 = 12^2$. Wynika stąd, że liczba 134 jest w wierszu 12. Pierwszą liczbą w tym wierszu jest 122, a ostatnią 144. W środkowej kolumnie jest liczba $\frac{122+144}{2} = 133$. Liczba 134 jest więc w pierwszej kolumnie na prawo od środkowej kolumny. Liczba w środkowej kolumnie w 61. wierszu jest równa $\frac{60^2+1+61^2}{2} = 3661$. Kolejną liczbą jest 3662 i właśnie ta liczba jest zapisana w tej samej kolumnie co liczba 134.

Zadanie 4. Pole trójkąta *ABC* jest równe $x = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Pole trójkąta *APR* jest równe $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{9}x$, a pole trójkąta *PBQ* jest równe $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{9}x$. Odcinek *TQ* jest równoległy do boku *AB*,



a więc trójkąt *TQC* jest trójkątem równobocznym o takim samym polu co trójkąt *APR*. Trójkąt prostokątny *RQC*, jest połową trójkąta *TQC*, a więc jego pole jest równe $\frac{2}{9}x$. Pole trójkąta *PQR* jest równe $x - \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}x = \frac{2}{9}x = \frac{2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Zadanie 5. Ponieważ liczba krów zwiększyła się z 7 do 8, liczba miarek mleka zwiększy się $\frac{8}{7}$ razy. Ponieważ liczba dni zwiększyła się z 6 do 9, to liczba miarek zwiększy się $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ razy. Liczba miarek mleka będzie równa $70 \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{3}{2} = 120$.

Zadanie 6. Z warunków zadania otrzymujemy, że

$$\begin{cases} ab = 12 \\ ac = 21 \\ bc = 28. \end{cases}$$

Dzieląc pierwsze równanie przez drugie otrzymujemy równanie $\frac{b}{c} = \frac{4}{7}$, które po pomnożeniu przez ostatnie równanie prowadzi do warunku $b^2 = 4^2$, czyli $b = 4$. Następnie wnioskujemy, że $a = 3$ i $c = 7$. W konsekwencji $3a + 2b + c = 24$.

Zadanie 7. Rozważmy liczby pięciocyfrowe $(xyz14)_{10}$. Liczba ta będzie spełniała warunki zadania, gdy $x \neq 0$ i liczba $x + y + z + 1 + 4$ jest podzielna przez 3 tzn., wtedy gdy liczba $x + y + z$ przy dzieleniu przez przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Zatem ze zbioru liczb trzycyfrowych $(xyz)_{10}$, gdzie $x \neq 0$, należy wybrać te, które są o 1 większe od liczby podzielnej przez 3. Takie liczby to 100, 104, …, 997 i jest ich $\frac{997-100}{3} + 1 = 300$.

Zadanie 8. Liczby a, b, c i d wybrane spośród liczb 1, 3, 5, 7, i 9 spełniają dany warunek tylko wtedy, gdy $a + b = c + d$. Możliwe są następujące równości

$$1 + 7 = 3 + 5,\ \ 3 + 9 = 5 + 7,\ \ 1 + 9 = 3 + 7.$$

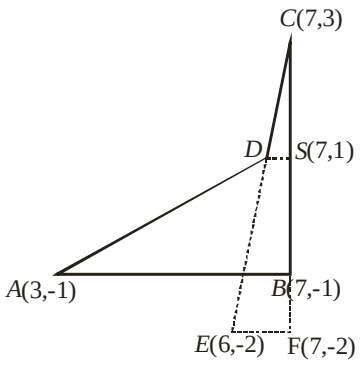
Dla każdej z nich istnieje 8 różnych przyporządkowani liczb tworzących sumy po obydwu stronach znaków równości liczbom a, b, c i d. Wszystkich możliwości jest 24.

Zadanie 9. Niech t oznacza czas (w godzinach) jazdy z górki. Wtedy czas jazdy pod górkę jest równy $1{,}5 - t$. Przebyta droga jest równa $25t + 10(1{,}5 - t) = 30$, stąd $t = 1$ godzin, a więc Marysia jechała z górki 60 minut.

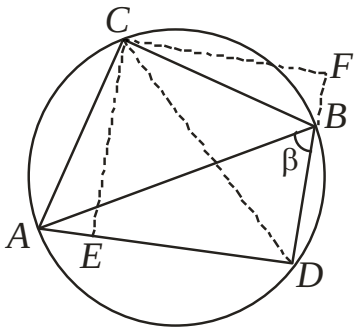
Zadanie 10. Z warunków zadania $\frac{1+2+3+\cdots+19+x}{20} = 0{,}24x$, a więc $\frac{\frac{19\cdot 20}{2}+x}{20} = 0{,}24x$.
Stąd $x = 50$, a więc średnia arytmetyczna jest równa $0{,}24x = 0{,}24\cdot 50 = 12$.
Obliczmy $12 - \frac{1+2+3+\cdots+19}{19} = 2$.

Zadanie 11. Uzupełnijmy rysunek. Środek *S* odcinka *BC* ma współrzędne (7,1). Zauważamy, że $BS = CS = 2$ oraz $FS = 3$. Z podobieństwa trójkątów *EFC* i *DSC* otrzymujemy $\frac{DS}{EF} = \frac{CS}{BC}$, a więc $\frac{DS}{1} = \frac{2}{5}$, czyli $DS = \frac{2}{5}$.
Pole czworokąta *ABCD* jest równe

$$\frac{AB+DS}{2} \cdot BS + \frac{1}{2} \cdot DS \cdot CS = \frac{4+\frac{2}{5}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{5} = 4{,}8.$$



Zadanie 12. Dorysujmy odcinek *CD*, którego długość jest szukaną wartością, oraz wysokość trójkąta *ADC* opuszczoną na bok *AD* i dorysujmy odcinek *CF*, prostopadły do wysokości *CE*, gdzie punkt *F* leży na przedłużeniu boku *BD*. Ponieważ $|\sphericalangle ADB| = 90^0$, więc $|\sphericalangle DAB| = 90^0 - \beta$ i, w konsekwencji, $|\sphericalangle DAC| = 135^0 - \beta$. Zauważmy, że $|\sphericalangle CBF| = 180^0 - 45^0 - \beta = 135^0 - \beta$. Pokazaliśmy, że w trójkątach prostokątnych *AEC* i *CBF* mamy dwie pary odpowiadających sobie kątów przystających (a więc trzecia para też jest utworzona z kątów przystających). Ponieważ na mocy założenia przeciwprostokątne tych trójkątów są równe, więc trójkąty *AEC* i *CBF* są przystające (cecha kbk przystawania trójkątów). Z udowodnionego przystawania trójkątów wynika, że czworokąt *EDFC* jest kwadratem, jego pole jest równe 32. Odcinek *CD* jest przekątną tego kwadratu. Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $CD = \sqrt{ED^2 + EC^2} = \sqrt{32 + 32} = 8$.



Zadanie 13. Z warunków zadania wynika, że nogi kur stanowią $\frac{2}{5}$ nóg prosiaków, a więc kur jest $\frac{4}{5}p$, czyli wszystkich zwierząt jest $p + \frac{4}{5}p = \frac{9}{5}p$. Ponieważ liczba zwierząt jest liczbą całkowitą, więc liczba p dzieli się przez 5. Liczba p nie dzieli się przez dwa, bo liczba zwierząt jest nieparzysta. Ponieważ $\frac{9}{5}p < 50$, więc p może być równe 5, 15 i 25. Są 3 możliwości.

Zadanie 14. Niech *n* oznacza liczbę wszystkich cegieł. Obaj murarze pracując razem i nie tracąc czasu na gadanie w ciągu jednej godziny wykonaliby $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{23}{132}$ całej pracy. Zatem w ciągu jednej godziny ułożyliby $\frac{n}{\frac{23}{132}} = \frac{132}{23}n$ cegieł, a ponieważ gadają, to układają $\frac{132}{23}n - 10$ cegieł w ciągu jednej godziny. Otrzymujemy równanie $\frac{132}{23}n - 10 = \frac{n}{6}$, skąd $n = 1320$ cegieł.

Zadanie 15. Każda z warstw składa się z 40 sześcianów jednostkowych ułożonych w 5 rzędach, zatem w jednym rzędzie znajduje się 8 sześcianów. Rozważmy drugą warstwę od dołu utworzonego prostopadłościanu. Wszystkie „dolne” i „górne” ściany sześcianów jednostkowych są białe. Po usunięciu sześcianów jednostkowych umieszczonych na brzegach pozostają 3 rzędy po 6 sześcianów jednostkowych – razem 18 sześcianów jednostkowych. Takich warstw jest 5 (pierwsza i siódma warstwa nie zawiera białych sześcianów jednostkowych). Wszystkich białych sześcianów jednostkowych jest $5 \cdot 18 = 90$.

Etap III finał.

a) Zawody trzeciego stopnia. Zadania otwarte.

Zadanie 1. Największy wspólny dzielnik dwóch liczb całkowitych, dodatnich x i y jest równy 108, a ich suma jest równa 1944. Podaj wszystkie pary (x, y), gdzie $x < y$.

Odpowiedź uzasadnij.

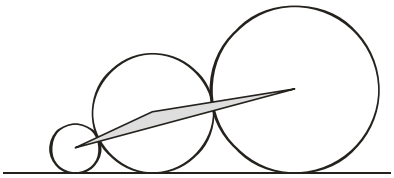
Zadanie 2. Dwaj biegacze biegają po zamkniętej pętli długości 1,5km. Jeśli biegną w tym samym kierunku, to mijają się co 20 minut, a gdy biegną w przeciwnych kierunkach,

to mijają się co 12 minut. Oblicz prędkość szybszego biegacza (w km/h).

Uwaga. Przyjmujemy, że każdy z biegaczy biegnie ze stałą prędkością.

Zadanie 3. Okolice miejscowości X zamieszkują dziki. Wśród nich $a\%$ loch ma po 9 młodych, $b\%$ loch ma po 5 młodych, a pozostałe lochy mają po 2 młode. Wiadomo, że loch mających po 5 młodych jest mniej od tych, które mają po 2 młode. Dla jakich całkowitych a i b jest to możliwe, jeśli na każdą lochę przypada średnio 7 młodych?

Zadanie 4. Trzy okręgi o promieniach długości 1, 4 i 9 są styczne do tej samej prostej. Okrąg o promieniu długości 4 jest zewnętrznie styczny do pozostałych dwóch okręgów. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są środki tych okręgów



Uwaga. Na rysunku nie zostały zachowane odpowiednie proporcje.

Zadanie 5. Na każdej ścianie sześcianu zapisano liczbę całkowitą dodatnią w taki sposób, że na różnych ścianach zapisano różne liczby. W każdym wierzchołku będącym wspólnym dla trzech ścian zapisano liczbę równą iloczynowi liczb zapisanych na tych ścianach. Suma wszystkich liczb zapisanych w wierzchołkach jest równa 1105. Wyznacz sumę wszystkich liczb zapisanych na ścianach sześcianu.

b) Zawody trzeciego stopnia. Szkice rozwiązań zadań otwartych.

Zadanie 1. Ponieważ $\mathrm{NWD}(x, y) = 108$, to dla pewnych dodatnich, względnie pierwszych liczb całkowitych x_1 i y_1 zachodzą następujące warunki $x = 108x_1$ i $y = 108y_1$. Wynika stąd, że $x + y = 108x_1 + 108y_1 = 1944$, a więc $x_1 + y_1 = 18$. Jedynymi parami (x_1, y_1) względnie pierwszych liczb dodatnich całkowitymi x_1 i y_1 spełniającymi ostatni warunek i warunek $x_1 < y_1$ są pary (1,17), (5,13), (7,11), a więc pary (x, y), to (108,1836), (540,1404), (756,1188).

Zadanie 2. Zauważmy, że 20 minut to $\frac{1}{3}$ godziny, a 12 minut, to $\frac{1}{5}$ godziny. Niech v_1 i v_2 oznaczają odpowiednio prędkość (w km/h) szybszego i wolniejszego biegacza. Jeśli biegną w tę samą stronę, to pomiędzy dwoma kolejnymi spotkaniami szybszy biegacz pokonuje drogę wolniejszego biegacza i, dodatkowo, przebiega całą pętlę, a więc $\frac{1}{3}v_1 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{3}{2}$. Jeśli biegną w przeciwną stronę, to pomiędzy dwoma kolejnymi spotkaniami obaj biegacze w sumie pokonują całą pętlę, a więc $\frac{1}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 = \frac{3}{2}$. Rozwiązując układ złożony z otrzymanych równań otrzymujemy $v_1 = 6$ i $v_2 = 1{,}5$. Prędkość szybszego biegacza wynosiła 6 km/h.

Zadanie 3. Niech n oznacza liczbę loch. Wtedy liczba wszystkich młodych jest równa $\frac{a}{100}n \cdot 9 + \frac{b}{100}n \cdot 5 + \left(1 - \frac{a}{100} - \frac{b}{100}\right)n \cdot 2$. Ponieważ na każdą lochę przypada średnio 7 młodych, więc $\frac{\frac{a}{100}n\cdot 9+\frac{b}{100}n\cdot 5+\left(1-\frac{a}{100}-\frac{b}{100}\right)n\cdot 2}{n} = 7$, a stąd

(1) $$3b = 500 - 7a.$$

Ponieważ loch mających po 5 młodych jest mniej od tych, które mają po 2 młode, więc $\frac{b}{100} < 1 - \frac{a}{100} - \frac{b}{100}$, a zatem

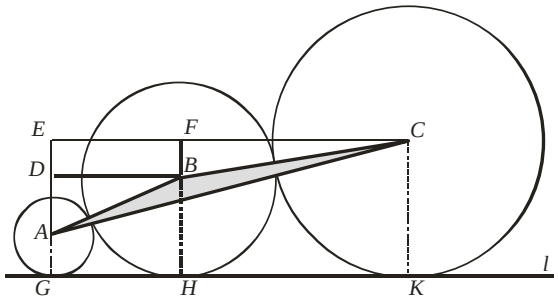
(2) $$a + 2b < 100.$$

Mnożąc obustronnie nierówność (2) przez 3 i korzystając z (1) otrzymujemy nierówność $2(500 - 7a) + 3a < 300$, a stąd $a > 63\frac{7}{11}$. Liczba a jest całkowita, a więc $a \geq 64$. Ponieważ $b \geq 0$, więc z (1) wynika, że $500 - 7a \geq 0$. Zatem $a \leq 71\frac{3}{7}$, a więc $a \leq 71$. Reasumując

(3) $$64 \leq a \leq 71.$$

Przekształcając warunek (1) otrzymujemy $3b = 500 - 7a = 498 - 6a - (a - 2) = 3(166 - 2a) - (a - 2)$. Wyrażenie po lewej stronie równości dzieli się przez 3, a więc wyrażenie po prawej stronie też jest podzielne przez 3. Stąd możemy wywnioskować, że wyrażenie $a - 2$ jest podzielne 3, a więc liczba a przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Stąd i z (3) wynika, że a jest jedną z liczb: 65, 68, 71. Stąd i z (1) otrzymujemy, że jedynymi parami (a, b), spełniającymi warunki zadania są: (65,15), (68,8), (71,1).

Zadanie 4. Niech *A*, *B* i *C* oznaczają odpowiednio środki okręgów o promieniach 1, 4 i 9. Odcinki *DB*, *EC* są równoległe do prostej *l*, stycznej do wszystkich okręgów. Odcinki *GE*, *HF* i *KC* są prostopadłe do prostej *l*. Ponieważ okręgi o środkach *A* i *B* są styczne zewnętrznie, więc $AB = 1 + 4 = 5$.



Odcinek *AD* jest różnicą promieni okręgów o środkach *B* i *A*, więc $AD = 4 - 1 = 3$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Analogicznie $FC = 12$. Zauważmy, że $AE = 8, BF = 5, EF = 4, EC = 16$. Pole trójkąta *ABC* jest równe różnicy pola trójkąta *ACE* i sumy pól trapezu *ABFE* oraz trójkąta *BCF*. Zatem pole trójkąta *ABC* jest równe jest równe $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 - \left(\frac{8+5}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12\right) = 8$.

Zadanie 5. Niech różne liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, e, f będą zapisane na ścianach sześcianu w taki sposób, że następujące trójki liczb $(a, b, e), (a, b, f), (b, c, e), (b, c, f), (c, d, e), (c, d, f),\ (a, d, e), (\ a, d, f)$ są umieszczone na ścianach o tym samym wierzchołku. Wtedy

$abe + abf + bce + bcf + cde + cdf + ade + adf = (ab + bc + cd + ad)f +$
$+(ab + bc + cd + +ad)e = (ab + bc + cd + ad)(e + f) = (a + c)(b + d)(e + f) ==$
$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17.$

Ponieważ na ścianach zapisano liczby całkowite dodatnie, więc każda z sum

$$(a + c), (b + d), (e + f)$$

jest większa od liczby 1.

Zatem $a + b + c + d + e + f = (a + c) + (b + d) + (e + f) = 5 + 13 + 17 = 35.$

II. Konkurs dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

1. Etap szkolny

a) Zawody pierwszego stopnia. Zadania zamknięte.

Zadanie 1 (2pkt.). $\left(7^{(3^{-1})^2}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[6]{\left(\sqrt[6]{7}\right)^7} \cdot 4^{\frac{2}{3}} =$

A. $2\sqrt[3]{14}$; B. $7^{11}\left(4\sqrt[3]{7}\right)^{\frac{2}{3}}$; C. $14^{\frac{2}{3}}$; D. $28^{\frac{2}{3}}$.

Zadanie 2 (2pkt.). Jeśli współrzędne punktu $P(x, y)$ spełniają każde z równań $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$, $y = -2(x-2)^2 + m$ dla dokładnie trzech różnych par (x, y), to

A. $m = 2$; B. $m \in (1,2)$; C. $m \in (0,1)$; D. $m \in \langle 0, 2)$.

Zadanie 3 (2pkt.). Suma czwartych potęg pierwiastków rzeczywistych równania $x^4 - 11x^2 + 4 = 0$ jest równa

A. 148; B. 184; C. 212; D. 226.

Zadanie 4 (2pkt.). Miejscowości A, B i C rozmieszczone są wzdłuż prostej drogi w podanej kolejności. Pojazdy X, Y i Z poruszają się ruchem jednostajnym odpowiednio z prędkościami $v, 2v$ i $3v$. Wszystkie trzy pojazdy zaczynają jechać w tym samym czasie. Pojazd Y rusza z miejscowości A w kierunku C, pojazd Z rusza z miejscowości B w kierunku C i pojazd X z miejscowości C w kierunku A. Pojazd Z po spotkaniu pojazdu X zawraca i jedzie w kierunku A, spotykając pojazd Y w połowie drogi pomiędzy A i B. Długość drogi AC jest równa 56km. Wynika stąd, że odległość i z A do B jest równa

A. 30km; B. 36km; C. 42km; D. 48km.

Zadanie 5 (2pkt.). Ciąg (a_n) spełnia warunki:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1 \text{ i } a_n = a_{n-2} - a_{n-4} + n,$$

dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n \geq 5$. Wtedy

A. $a_{2017} = 2017$; B. $a_{2018} = 2018$; C. $a_{2017} < a_{2018}$; D. $a_{2017} > a_{2018}$.

Zadanie 6 (2pkt.). Liczba wszystkich uporządkowanych par (a, b) liczb całkowitych dodatnich, dla których $ab \leq 121$, jest równa

A. 242; B. 605; C. 726; D. 121^2.

Zadanie 7 (2pkt.). Liczby całkowite p i q, mniejsze od 30, spełniają warunek

$\log_{\frac{2p}{q}} 9 = \log_{\frac{5p}{q}} 27$. Wynika stąd, że $p + q =$

A. 7; B. 23; C. 33; D. 36.

Zadanie 8 (2pkt.). Równanie $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 - 1 = 0$ ma

A. 0 rozwiązań; B. 1 rozwiązanie;

C. 2 rozwiązania; D. nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 9 (2pkt.). Wielomian $ax^{2019} - x^{2018} + b$ jest podzielny przez dwumian $x^2 - 1$. Wynika stąd, że

A. $a = b = 1$; B. $a = b = -1$; C. $a = b = 2$; D. $a^2 + b^2 = 1$.

Zadanie 10 (2pkt.). Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 i 4. Okrąg o promieniu r jest styczny do prostych zawierających przyprostokątne tego trójkąta i jest styczny wewnętrznie do okręgu opisanego na tym trójkącie. Wtedy $r =$

A. 0,5; B. 1; C. 1,5; D. 2.

Zadanie 11 (2pkt.). W prostokącie *ABCD* punkty *E* i *F* (różne od wierzchołków prostokąta *ABCD*) leżą odpowiednio na bokach *AB* i *BC*. Pola trójkątów $\Delta EBF, \Delta AED$ i ΔDFC są odpowiednio równe 3, 4 i 5. Wynika stąd, że pole trójkąta ΔDEF jest równe

A. 4; B. 8; C. 10; D. 13.

Zadanie 12 (2pkt.). W czworościanie *ABCD* dane są długości krawędzi $AD = BC = 28$,

$AC = BD = 44, AB = CD = 52$. Punkty *M* i *N* są odpowiednio środkami krawędzi *AB* i *CD*. Wtedy długość odcinka *MN* jest równa

A. $2\sqrt{2}$; B. $5\sqrt{2}$; C. $10\sqrt{2}$; D. $15\sqrt{2}$.

b) Zawody pierwszego stopnia. Zadania otwarte.

Zadanie 13 (6 pkt.). W pewnym banku kapitalizacja odsetek następuje na koniec każdego kwartału i jednocześnie na koniec każdego kwartału kwartalna stopa procentowa wzrasta o 1 punkt procentowy. Niech x% oznacza stopę procentową w pierwszym kwartale. Niech f oznacza funkcję zmiennej x wyrażającą stosunek kwoty odebranej z banku po roku oszczędzania do kwoty złożonej w banku na początku roku.

a) Zapisz wzór funkcji f.

b) Wyznacz x, jeśli $10^8 f(x-100) = 120$ i x jest liczbą całkowitą.

Zadanie 14 (8 pkt.). Dane jest równanie $(4m-1)x^2 - (4m-1)x + m - 1 = 0$.

Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że

a) spełniona jest nierówność $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{11}{2}$?

b) wyrażenie $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ jest liczbą całkowitą, jeśli m jest liczbą całkowitą?

Zadanie 15 (6 pkt.). W trójkącie ostrokątnym ABC dane są długości boków $AB = c$, $BC = a, AC = b$. Punkt P jest położony wewnątrz trójkąta ABC w taki sposób, że $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA| = 120^0$. Wyznacz sumę kwadratów promieni okręgów opisanych na trójkątach $\Delta APB, \Delta BPC, \Delta CPA$.

Zadanie 16 (6 pkt.). Z cylindrycznego ustawionego pionowo naczynia pełnego wody zdjęto wieko o powierzchni 48π. Następnie zanurzono do niego naroże sześcianu w taki sposób, że przekątna sześcianu, której końcem jest wierzchołek naroża zanurzonego do wody leży na prostej zawierającej oś obrotu cylindrycznego naczynia (naroże sześcianu opiera się na brzegu naczynia). Oblicz objętość wody, która wylała się z cylindrycznego naczynia.

Uwaga. Zakładamy, że woda wylała się tylko i wyłącznie na skutek zanurzenia części sześcianu.

c) Zawody pierwszego stopnia. Schemat odpowiedzi i szkice rozwiązań zadań zamkniętych.

Schemat odpowiedzi

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
Odp.	A	A	D	D	A	B	C	B	D	D	B	A

Zadanie 1. Obliczmy $\left(7^{(3^{-1})^2}\right)^{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt[6]{\left(\sqrt[6]{7}\right)^7} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{4}+\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{6}} \cdot (4^2)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{14}$.

Zadanie 2. Mamy równanie okręgu o środku w punkcie (2,1) i promieniu 1 oraz równanie paraboli o ramionach skierowanych w dół, której osią symetrii jest prosta o równaniu $x = 2$. Jeśli współrzędne punktu $P(x, y)$ spełniają każde z równań dla dokładnie trzech różnych par (x, y), to wierzchołek paraboli leży na okręgu. Jest to możliwe, gdy wierzchołek ma współrzędne (0,2) lub (2,2). Tylko w drugim przypadku warunki zadania są spełnione. Zatem $2 = -2(2-2)^2 + m$, stąd $m = 2$.

Zadanie 3. Podstawiając $t = x^2$ otrzymujemy równanie $t^2 - 11t + 4 = 0$. Równanie to ma dwa pierwiastki t_1, t_2. Ponieważ $t_1 t_2 = 4 > 0$ i $t_1 + t_2 = 11 > 0$, więc równanie to ma dwa pierwiastki dodatnie. Są one różne. Dane równanie ma cztery pierwiastki $-\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}$. Suma czwartych potęg tych pierwiastków jest równa

$$2(t_1^2 + t_2^2) = 2\{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2\} = 2(11^2 - 2 \cdot 4)=226.$$

Zadanie 4. Niech a i b oznaczają odpowiednio odległość z miejscowości A do B i odległość z miejscowości B do C. Ponieważ pojazd Z, jadąc w kierunku C, zawróci po spotkaniu pojazdu X, jadąc od niego trzy razy szybciej, więc przebędzie do tego momentu drogę $\frac{3}{4}b$. Wracając ponownie przebędzie drogę $\frac{3}{4}b$, a następnie przebędzie drogę $\frac{a}{2}$ (bo z pojazdem Y spotka się w połowie drogi z miejscowości A do B). Zatem pojazd Z przebędzie drogę $\frac{3b+a}{2}$. Pojazd Y w tym samym czasie przebędzie drogę $\frac{a}{2}$. Ponieważ prędkość pojazdu Z stanowi $\frac{3}{2}$ prędkości pojazdu Y, więc $\frac{3b+a}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Stąd $b = \frac{a}{6}$. Otrzymujemy równanie $a + \frac{a}{6} = 56$, a więc $a = 48$km.

Zadanie 5. Niech $n \geq 7$.
Obliczmy

$$a_n = a_{n-2} - a_{n-4} + n = (a_{n-4} - a_{n-6} + n - 2) - a_{n-4} + n = 2n - 2 - a_{n-6}.$$

Pokazaliśmy, że

(1) $$a_n = 2n - 2 - a_{n-6} \text{ dla każdego } n \geq 7.$$

Korzystając z (1) obliczmy

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2 - a_{n-5} - (2n - 2 - a_{n-6}) = 2 - (a_{n-5} - a_{n-6}).$$

Wynika stąd, że dla $n \geq 13$ możemy obliczyć

$$a_{n+1} - a_n = 2 - (a_{n-5} - a_{n-6}) = 2 - \{2 - (a_{n-11} - a_{n-12})\} = a_{n-11} - a_{n-12}.$$

Pokazaliśmy, że

(2) $$a_{n+1} - a_n = a_{n-11} - a_{n-12} \text{ dla każdego } n \geq 13.$$

Korzystając z (2) obliczamy $a_{2018} - a_{2017} = a_{2006} - a_{2005} = \cdots = a_{14} - a_{13}$, ale na mocy (1) otrzymujemy $a_{14} - a_{13} = 2 - a_8 + a_7$. Obliczmy $a_5 = a_3 - a_1 + 5 = 5$, $a_6 = a_4 - a_2 + 6 = 6$, $a_7 = a_5 - a_3 + 7 = 11$, $a_8 = a_6 - a_4 + 8 = 13$. Zatem $a_{2018} - a_{2017} = 0$. Wynika stąd, że odpowiedzi C i D nie są poprawne. Zauważmy, że na mocy (1) otrzymujemy

$a_n + a_{n-6} = 2n - 2$ dla $n \geq 7$. Zatem dla $n \geq 7$ liczby a_n, a_{n-6} są tej samej parzystości, a więc tej samej parzystości są liczby $a_{2018}, a_{2012}, \dots, a_8 = 13$. Poprawną odpowiedzią jest odpowiedź A.

Zadanie 6. Dla każdego $k = 1, 2, 3, \dots, 121$ liczba liczb całkowitych $j \in \{1, 2, 3, \dots, 121\}$ takich, że $kj \leq 121$ jest równa $\left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor$. Zauważmy, że

$$\left\lfloor \frac{121}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{121}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{121}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{121}{4} \right\rfloor = 121 + 60 + 40 + 30 = 251 > 242.$$

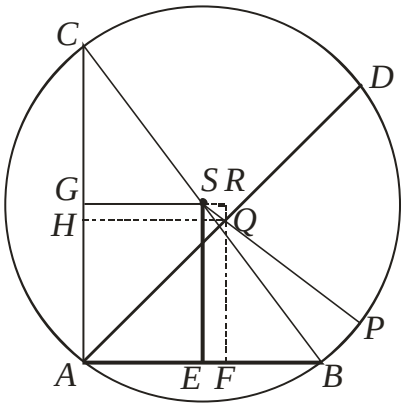
Wynika stąd, że odpowiedź A nie jest prawdziwa. Obliczmy $\sum_{k=1}^{12} \left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor = 373$ i $\sum_{k=41}^{121} \left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor = \sum_{k=41}^{60} \left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor + \sum_{k=61}^{121} \left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor = \sum_{k=41}^{60} 2 + \sum_{k=61}^{121} 1 = 20 \cdot 2 + 61 \cdot 1 = 101.$ Nie została policzona suma $\sum_{k=13}^{40} \left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor$. Gdyby odpowiedź C była prawdziwa to ostatnia suma byłaby równa $726 - (373 + 101) = 252$. Wynika stąd, że średnio każda z liczb postaci $\left\lfloor \frac{121}{k} \right\rfloor$, gdzie $k \in \{13, 14, \dots, 40\}$ byłaby wtedy równa $\frac{252}{28} = 9$. Jest to niemożliwe, bo $\left\lfloor \frac{121}{13} \right\rfloor = 9$, a pozostałe z liczb $\left\lfloor \frac{121}{14} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{121}{15} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{121}{40} \right\rfloor$ są mniejsze. Liczba spełniająca warunki zadania jest mniejsza od 726 i większa od 242, a więc poprawna jest odpowiedź B.

Zadanie 7. Niech $x = \frac{p}{q}$. Wtedy $\log_{2x} 9 = \log_{5x} 27$, czyli $2\log_{2x} 3 = 3\log_{5x} 3$ a stąd $\frac{2}{\log_3 2x} = \frac{3}{\log_3 5x}$. Kolejne przekształcenia prowadzą do równości $\log_3 x = \log_3 \frac{25}{8}$, a więc $x = \frac{25}{8}$, tzn. $\frac{p}{q} = \frac{25}{8}$. Ponieważ $p < 30, q < 30$ oraz liczby 8 i 25 są względnie pierwsze, to $p = 25, q = 8$. Stąd $p + q = 33$.

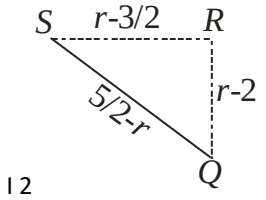
Zadanie 8. Funkcja kwadratowa $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 + 1$ osiąga najmniejszą wartość równą 1 dla $x = \frac{\pi}{8}$. Jednocześnie $\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right)$=1. Punkt o współrzędnych $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ jest jedynym punktem wspólnym wykresów funkcji $f(x)$ i $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Równanie ma jedno rozwiązanie.

Zadanie 9. Oznaczmy $W(x) = ax^{2019} - x^{2018} + b$. Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x^2 - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielny przez każdy z wielomianów $x - 1, x + 1$. Na mocy twierdzenia Bezouta jest to równoważne układowi $\begin{cases} W(1) = 0 \\ W(-1) = 0 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} a - 1 + b = 0 \\ -a - 1 + b = 0 \end{cases}$. Wynika stąd, że $a = 0$ i $b = 1$, a więc $a^2 + b^2 = 1$.

Zadanie 10. Niech *ABC* będzie trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych $AB = 3$ i $AC = 4$. Środek *S* okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej $BC = 5$. Promień okręgu jest równy $\frac{5}{2}$. Środek *Q* okręgu stycznego do prostych zawierających przyprostokątne trójkąta *ABC* leży na dwusiecznej *AD* kąta *BAC*. Wiemy, że środek *Q* okręgu stycznego wewnętrznie do okręgu opisanego na trójkącie *ABC*, środek *S* i punkt *P* styczności okręgów leżą na tej samej prostej. Punkt *P* leży na łuku *BC*, zawierającym punkt *D*



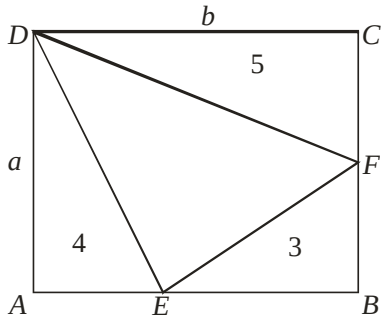
(bo okrąg o środku Q jest styczny do przyprostokątnych). Poprowadźmy promienie FQ i HQ i przedłużmy promień FQ do punktu R, leżącego na prostej GS. Rozważmy trójkąt QRS (przypuśćmy, że taki trójkąt istnieje). Ponieważ odcinki GS i ES są liniami środkowymi trójkąta ABC, to ich długości są odpowiednio równe $\frac{3}{2}$ i 2. Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa



$$\left(r-\frac{3}{2}\right)^2+(r-2)^2=\left(\frac{5}{2}-r\right)^2.$$

Stąd $r=2$. Przypuszczenie, że trójkąt QRS istnieje okazało się fałszywe, a więc $Q=R$.

Zadanie 11. Oznaczmy długości boków jako a i b (tak jak na rysunku). Wtedy $P_{AED}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot a=4$. Stąd $AE=\frac{8}{a}$. Analogicznie $CF=\frac{10}{b}$. Wtedy $BE=b-\frac{8}{a}$ i $BF=a-\frac{10}{b}$. Ponieważ pole trójkąta EBF jest równe 3, więc



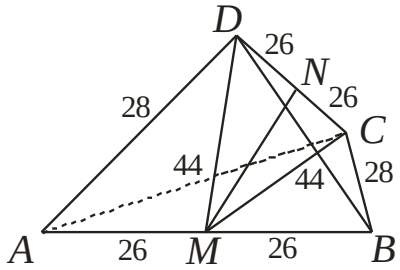
$$\frac{1}{2}\cdot\left(a-\frac{10}{b}\right)\left(b-\frac{8}{a}\right)=3.$$

Po przekształceniach otrzymujemy $(ab)^2-24ab+80=0$. Zatem $ab=20$ lub $ab=4$. Drugie rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, bo pole kwadratu jest większe od pola trójkąta DFC. Pole trójkąta DEF jest równe $20-(3+4+5)=8$.

Zadanie 12. Obliczmy długość środkowej MC. Stosujemy twierdzenie kosinusów dla trójkąta ABC i dla trójkąta AMC

$$\begin{cases}28^2=52^2+44^2-2\cdot 52\cdot 44\cdot\cos A\\ MC^2=26^2+44^2-2\cdot 26\cdot 44\cdot\cos A.\end{cases}$$

Stąd $MC^2=684$. Z trójkąta prostokątnego MCN (zauważmy, że MN jest wysokością w trójkącie równoramiennym CMD), na mocy twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy $MN=\sqrt{684-26^2}=2\sqrt{2}$.



d) Zawody pierwszego stopnia. Szkice rozwiązań zadań otwartych.

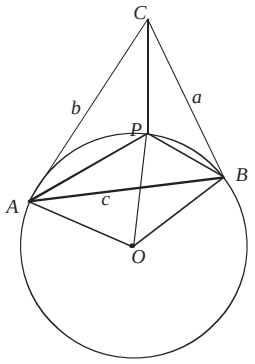
Zadanie 13. Niech a oznacza kwotę złożoną w banku. Stopa procentowa po kolejnych kwartałach jest równa $x\%, (x+1)\%, (x+2)\%, (x+3)\%$. Zatem po naliczeniu odsetek po I kwartale kwota jest równa $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$, po II kwartale $a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+1}{100}\right)$, itd. Wzór funkcji f jest następujący $f(x)=\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+1}{100}\right)\left(1+\frac{x+2}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)$. Zauważmy, że $10^8 f(x-100)=120$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x(x+1)(x+2)(x+3)=120$. Ponieważ x jest liczbą całkowitą dodatnią, to wyrażenie po lewej stronie równości jest iloczynem czterech kolejnych liczb całkowitych dodatnich. Możemy zapisać $120=2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ -jest to jedyny sposób przestawienia liczby 120 za pomocą kolejnych liczbą całkowitych dodatnich. Wynika stąd, że $x=2$.

Zadanie 14. Skoro równanie ma dwa różne pierwiastki, to $4m-1\neq 0$, a więc $m\neq\frac{1}{4}$. Poza tym $\Delta=3(4m-1)$, a więc $\Delta>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$. Na mocy wzorów Viete'a otrzymujemy $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{4m-1}{m-1}$. Warunek $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leq\frac{11}{2}$ jest równoważny warunkowi $\frac{4m-1}{m-1}\leq\frac{11}{2}$, a to oznacza, że $m\in(-\infty,1)\cup\langle 3,+\infty\rangle$.

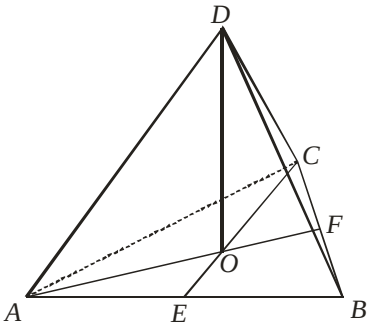
Odpowiedź do pkt a): $m\in\left(\frac{1}{4},1\right)\cup\langle 3,+\infty\rangle$.

Wyrażenie $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4+\frac{3}{m-1}$ przyjmuje wartości całkowite, tylko wtedy, gdy liczba $m-1$ jest dzielnikiem liczby 3, tzn., gdy m jest jedną z liczb: $-2,0,2,4$. Uwzględniając założenie $m\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$, otrzymujemy, że $m=2$ lub $m=4$.

Zadanie 15. Rozważmy najpierw trójkąt APB i niech r będzie promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie. Na mocy twierdzenia sinusów $\frac{AB}{\sin 120^0}=2r$, stąd $r^2=\frac{c^2}{3}$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych trójkątów. Zatem suma kwadratów promieni okręgów opisanych na trójkątach jest równa $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.



Zadanie 16. Naroże sześcianu zanurzone w naczyniu cylindrycznym jest ostrosłupem trójkątnym prawidłowym, którego każde dwie krawędzie boczne są prostopadłe. Jego podstawa jest trójkątem równobocznym wpisanym w koło o polu 48π, a więc w koło o promieniu $4\sqrt{3}$. Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $\frac{3}{2}\cdot 4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$, a więc jego bok jest równy 12. Na mocy twierdzenia Pitagorasa



$AB^2=AD^2+BD^2$. Przyjmując $AD=BD=a$, otrzymujemy $2a^2=12^2$, a stąd $a=6\sqrt{2}$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa $OD=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{6}$.

Objętość naroża jest równa $\frac{1}{3}\cdot\frac{12^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{6}=72\sqrt{2}$.

2. Finał, część I.

a) Zawody finałowe, część I. Zadania zamknięte.

Zadanie 1 (2pkt.). Jan zapisuje m-ty miesiąc r –-tego roku w formacie $m \cdot r$ i nie zapisuje dat po roku 2020. Np. $7 \cdot 1829$ oznacza lipiec 1829 roku. Jego kolega Michał zauważył wykonany przez Jana zapis w formacie $m \cdot r$ (dla pewnych konkretnych m i r) i wymnożył te liczby. Otrzymał liczbę $\big||a| - |a - |a|\big| - 2a$, gdzie $a = -2019$. Jan liczbę uzyskaną przez Michała ponownie zapisał w formacie $m \cdot r$. Zapis Jana mógł oznaczać

A. maj 2019 roku ; B. kwiecień 2019 roku;
C. czerwiec 2019 roku; D. wrzesień 673 roku.

Zadanie 2 (2pkt.). Pierwiastki równania $x^2 + ax + b = 0$ są trzykrotnościami pierwiastków równania $x^2 + mx + n = 0$. Wynika stąd, że

A. $9(m - n) = 3a - b$; B. $9(a - b) = 3m - n$;
C. $9(b - a) = 3n - m$; D. $9(n - m) = 3b - a$.

Zadanie 3 (2pkt.). Niech (a_n) będzie ciągiem geometrycznym, w którym $a_6 = 31!$ i $a_{11} = 32!$. Wtedy

A. $3^{14}|a_1$; B. $5^8|a_1$; C. $7^5|a_1$; D. $10^8|a_1$.

Zadanie 4 (2pkt.). Brzegiem koła K_1 jest okrąg $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 16$, a brzegiem koła K_2 jest okrąg $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$. Liczba punktów o obydwu współrzędnych całkowitych należących do części wspólnej kół K_1 i K_2 jest równa

A. 14; B. 15; C. 16; D. 17.

Zadanie 5 (2pkt.). Niech x i y będą liczbami całkowitymi i $x \in \langle 2,2018 \rangle$ oraz $y \in \langle 2,2019 \rangle$. Liczba wszystkich par (x, y) spełniających warunek $\log_x y + 35 \log_y x = 12$ jest równa

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

Zadanie 6 (2pkt.). W meczu na szczycie w lidze koszykówki pań zmierzyły się dwie drużyny: drużyna A i drużyna B. W pierwszej kwarcie tego zaciętego meczu obie drużyny zdobyły tyle samo punktów (cały mecz koszykówki składa się z czterech kwart – każda trwa 15 minut). Drużyna A w każdej kolejnej kwarcie zdobywała liczbę punktów większą o pewną ustaloną wartość od liczby punktów zdobytych w poprzedniej kwarcie. Liczby punktów drużyny B zdobyte w każdej kolejnej kwarcie utworzyły ciąg geometryczny. Mecz zakończył się zwycięstwem drużyny A, która zdobyła o 4 punkty więcej, ale nie więcej niż 100. Wynik meczu był następujący

A. 61:57; B. 62:58; C. 63:59; D. 64:60.

Zadanie 7 (2pkt.). Niech $f(x) = (x^2 - 7x + 4)(x^2 + 7x + 4)$. Liczba takich całkowitych, dodatnich argumentów n funkcji f, że $f(n)$ jest liczbą pierwszą jest równa

A. 0; B. 1; C. 3; D. co najmniej 4.

Zadanie 8 (2pkt.). Funkcja f spełnia warunek $(x + 6)f(x - 2) + f(2 - x) = 1$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x Wtedy $f(-1) =$

A. $\frac{4}{31}$; B. 13; C. $-\frac{5}{62}$; D. $\frac{2}{3}$.

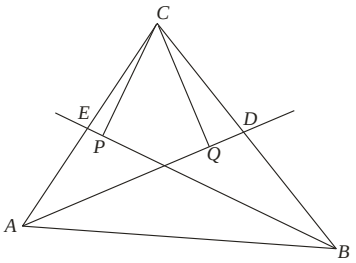
Zadanie 9 (2pkt.). W sześciokącie $ABCDEF$, którego wszystkie kąty wewnętrzne mają tę samą miarę dane są długości boków $AB = 13, BC = 11, CD = 10, DE = 5$. Kwadrat promienia największego koła jakie można „zmieścić" w tym sześciokącie jest równy

A. 42; B. $42\frac{1}{16}$; C. $42\frac{1}{8}$; D. $42\frac{3}{16}$.

Zadanie 10 (2pkt.). Przekątna prostokąta wynosi 17, a jego pole jest równe166. Wynika stąd, że obwód prostokąta jest równy

A. $6\sqrt{69}$; B. 50 ; C. $5\sqrt{106}$; D. 51.

Zadanie 11 (2pkt.). Proste AD i BE są prostymi zawierającymi dwusieczne odpowiednio kątów $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$. Odcinki CP i CQ są wysokościami trójkątów odpowiednio EBC i ADC. Jeśli $AC = 13, BC = 14, AB = 15$, to długość odcinka PQ jest równa



A. 4,5 B. 5; C. 5,5; D. 6.

Zadanie 12 (2pkt.). Wiadomo, że $\sin\alpha + \sin\beta = 0{,}25$ i $\cos\alpha + \cos\beta = 0{,}25\sqrt{5}$. Wtedy

Wtedy $\cos(\alpha - \beta) =$

A. $\frac{7}{16}$; B. $\frac{\sqrt{15}}{8}$; C. $-\frac{\sqrt{5}}{32}$; D. $-\frac{13}{16}$.

Zadanie 13 (2pkt.). Liczba $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot (2+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ jest równa

A. 2; B. 3; C. 5; D. 6.

Zadanie 14 (2pkt.). Dane są dwa ciągi liczbowe (a_n) i (x_n) o wyrazach większych od 1, spełniające warunek $a_i^{x_i} = a_{i+1}$ dla każdego $i = 1, 2, 3 \ldots$. Wtedy

A. $a_1 a_2 \cdot \ldots a_{2018} = \log_{x_1} x_{2019}$; B. $a_1 a_2 \cdot \ldots a_{2018} = \frac{x_{2019}}{x_1}$;

C. $x_1 x_2 \cdot \ldots x_{2018} = \log_{a_1} a_{2019}$; D. $x_1 x_2 \cdot \ldots x_{2018} = \frac{a_{2019}}{a_1}$.

Zadanie 15 (2pkt.). Każde dwie z trzech płaszczyzn w przestrzeni są prostopadłe. Częścią wspólną tych płaszczyzn jest jeden punkt. Figura utworzona z tych trzech płaszczyzn podzieliła przestrzeń na osiem części $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$, a każde dwie z tych trzech płaszczyzn wyznaczyły wspólną krawędź – w sumie powstały trzy krawędzie k, l, m. Dla każdego $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ kula K_i o promieniu 1, jest styczna do każdej z krawędzi k, l, m i jej środek znajduje się w części C_i. Pomiędzy tak skonstruowane kule K_i włożono kulę K, styczną do kuli K_i dla każdego $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Promień kuli K jest równy.

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$; B. $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$; C. $\frac{\sqrt{6}-2}{3}$;; D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}$;.

b) Zawody finałowe, część I. Schemat odpowiedzi i szkice rozwiązań zadań zamkniętych.

Schemat odpowiedzi

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
D	A	A	C	C	D	A	A	D	A	D	D	A	C	B

Zadanie 1. Wiedząc, że $a = -2019 < 0$, przekształćmy

$$\big||a| - |a - |a|\big| - 2a = |-a - |a— a)| - 2a = \big|-a - |2a|\big| - 2a = |-a + 2a| - 2a =$$
$$= |a| - 2a = -3a = 3 \cdot \big(-(-2019)\big) = 9 \cdot 673.$$

Zapis Jana mógł oznaczać wrzesień 673 roku.

Zadanie 2. Niech x_1, x_2 oznaczają pierwiastki równania $x^2 + mx + n = 0$.
Wtedy $x_1 + x_2 = -m$ i $x_1x_2 = n$. Pierwiastkami równania $x^2 + ax + b = 0$ są $3x_1, 3x_2$, a więc $-a = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = -3m$, czyli $a = 3m$.
Analogicznie $b = 3x_1 \cdot 3x_2 = 9x_1x_2 = 9n$. Obliczmy $9(m - n) = 3 \cdot 3m - 9n = 3a - b$.

Zadanie 3. Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego. Wtedy $32! = 31! \cdot q^5$, stąd $q = 2$. Zatem $a_1 = \frac{31!}{2^5}$. Wśród liczb 1, 2, …, 31 jest $\left\lfloor\frac{31}{3}\right\rfloor = 10$ liczb podzielnych przez 3, $\left\lfloor\frac{31}{9}\right\rfloor = 3$ liczb podzielnych przez 3^2 i $\left\lfloor\frac{31}{27}\right\rfloor = 1$ liczb podzielnych przez 3^3. Zatem liczba 31! dzieli się przez $3^{10+3\cdot(2-1)+1\cdot(3-1)} = 3^{14}$. Rozumując analogicznie można stwierdzić, że liczba 31! dzieli się przez 5^7, ale nie przez 5^8 oraz przez 7^4, ale nie przez 7^5. Skoro nie jest prawdą, że $5^8|a_1$, to nie jest prawdą, że $10^8|a_1$.

Zadanie 4. Nierówności opisujące koła K_1 i K_2 można zapisać w postaci

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 \leq 36 \text{ i } (x - 6)^2 + (y - 4)^2 \leq 25.$$

Jedyne pary liczb całkowitych spełniających obie nierówności jednocześnie, to $(1,4), (2,1), \dots, (2,7), (3,1), \dots, (3,7), (4,4)$. Jest ich 16.

Zadanie 5. Połóżmy $t = \log_x y$. Wtedy równanie warunek postać $t + \frac{35}{t} = 12$, a więc $t^2 - 12t + 35 = 0$. Stąd $t = 5$ lub $t = 7$. Wracając do oznaczeń otrzymujemy $y^5 = x$ lub $y^7 = x$. Pierwsze z równań spełniają pary (2,32), (3, 243), (4,1024), a drugie (2, 128). Są cztery pary (x, y).

Zadanie 6. Niech a oznacza liczbę punktów zdobytych przez każdą z drużyn w pierwszej kwarcie. Wtedy w poszczególnych kwartach drużyna A zdobyła $a, a + r, a + 2r, a + 3r$ punktów, gdzie r jest liczbą całkowitą, a drużyna B w poszczególnych kwartach zdobyła a, aq, aq^2, aq^3 punktów. Przyjmijmy, że q jest liczbą całkowitą. Ponieważ drużyna A zdobyła o 4 punkty więcej, więc

(1) $$4a + 6r = a(1 + q + q^2 + q^3)+4.$$

Jeśli $q = 1$, to z (1) wynika, że $r = \frac{2}{3}$.
Jeśli $q = 2$, to z (1) wynika, że $11a = 6r - 4 = 6(r - 1) + 2$, a więc liczba $11a$ przy dzieleniu przez 6 daję resztę 2 i jest podzielna przez 11. Liczby 11 i 6 są względnie pierwsze. Wynika stąd, że $11a \in \{44 + 66k: k = 0, 1, 2 \dots\}$. Tylko liczba $11a = 44$ spełnia warunki zadania. Wtedy $r = 8$. Można obliczyć, że mecz zakończył się wynikiem 64:60.

Jeśli $q = 3$ lub $q = 4$ to warunek (1) ma postać $18a = 3r - 2$ lub $81a = 6r - 4$. Są to warunki sprzeczne, gdyż wyrażenie po lewej stronie dzieli się przez 3, a wyrażenie po prawej stronie nie dzieli się przez 3. Gdyby $q > 5$, to $q^3 > 125$, a to jest niemożliwe.
Uwaga. W rozwiązaniu przyjęliśmy, że q jest liczbą całkowitą. Okazało się, że doprowadziło to do stwierdzenia, że poprawna jest odpowiedź D. Rozpatrywanie sytuacji, gdy q nie jest liczbą całkowitą okazało się zbędne.

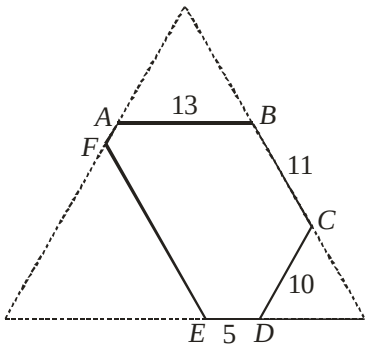
Zadanie 7. Jeśli liczba $f(n)$ jest liczbą pierwszą, to wtedy

$$|n^2 - 7n + 4| = 1 \text{ lub } |n^2 + 7n + 4| = 1.$$

Łatwo zauważyć, że jest to niemożliwe.

Zadanie 8. Podstawmy kolejno $x = 1$ i $x = 3$. Otrzymujemy $7f(-1) + f(1) = 1$ i $9f(1) + f(-1) = 1$. Otrzymujemy stąd $f(-1) = \frac{4}{31}$.

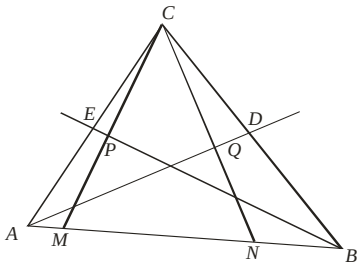
Zadanie 9. Każdy kąt wewnętrzny sześciokąta $ABCDEF$ ma miarę 120^0, a więc każdy kąt zewnętrzny ma miarę 60^0. Wynika stąd, że przedłużając niektóre z boków sześciokąta możemy utworzyć trójkąt równoboczny (por. rysunek), który można tak otrzymać w wynika złączenia sześciokąta $ABCDEF$ i trzech trójkątów równobocznych o bokach *AB*, *CD* i *EF*. Bok dużego trójkąta równobocznego jest równy $AB + BC + CD = 34$.



Zauważmy, że $EF = 34 - ED - DC = 19$. Promień największego koła jakie można „zmieścić” w tym sześciokącie jest równy $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{34\sqrt{3}}{2} - \frac{19\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$. Kwadrat promienia jest równy $42\frac{3}{16}$.

Zadanie 10. Oznaczmy boki prostokąta przez a i b. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $a^2 + b^2 = 17^2$. Zatem $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 17^2 + 2 \cdot 166 = 621$.
Stąd $a + b = 3\sqrt{69}$. Obwód prostokąta jest równy $2a + 2b = 6\sqrt{69}$.

Zadanie 11. Niech *M* i *N* będą punktami wspólnymi z odcinkiem *AB* odpowiednio prostej *CP* i *CQ*. Ponieważ Punkt *Q* leży na dwusiecznej *AD* i odcinek *CN* jest prostopadły do dwusiecznej *AD*, to trójkąty *ANQ* i *AQC* są przystające. Wynika stąd, że $AN = AC = 13$. Analogicznie $BM = BC = 14$. Stąd i z tego, że $AB = 15$ wynika, że $MN = 12$. Punkty *P* i *Q* są środkami boków trójkąta *MNC*.
Zatem $PQ = \frac{MN}{2} = \frac{12}{2} = 6$.



Zadanie 12. Po podniesieniu do kwadratu i zsumowaniu obydwu stron podanych równości otrzymujemy $2 + 2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = \frac{3}{8}$. Stąd $2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) = -\frac{13}{8}$, a więc $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{13}{16}$.

Zadanie 13. Obliczmy

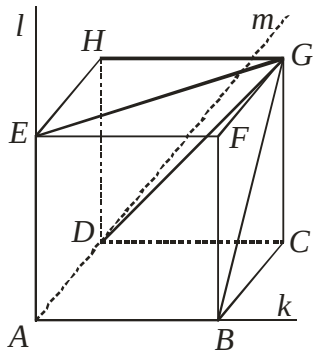
$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=\sqrt{(4-3)\left(2+\sqrt{3}\right)}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{12}+2}{4}}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=2.$$

Zadanie 14. Równość $a_i^{x_i}=a_{i+1}$ można zapisać równoważnie $x_i=\log_{a_i}a_{i+1}$ dla każdego $i=1,2,3\ldots$. Ponieważ $\log_{a_1}a_i\cdot\log_{a_i}a_{i+1}=\log_{a_1}a_i\cdot\frac{\log_{a_1}a_{i+1}}{\log_{a_1}a_i}=\log_{a_1}a_{i+1}$ dla każdego $i=2,3\ldots$, to $x_1x_2\cdot\ldots x_{2018}=\log_{a_1}a_2\log_{a_2}a_3\cdots\log_{a_{2018}}a_{2019}=\log_{a_1}a_{2019}$.

Zadanie 15. Rozważmy część C_1, w której znajduje się środek G kuli K_1. Kula ta jest styczna do krawędzi k,l,m odpowiednio w punktach B,E,D. Zauważmy, że środek G i punkty styczności są wierzchołkami sześcianu $ABCDEFGH$, w którym punkt A jest częścią trzech prostopadłych płaszczyzn, o których mowa w treści zadania. Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $EH^2+HG^2=EG^2=1$. Stąd $EH=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Punkt A jest środkiem kuli K stycznej zewnętrznie do kuli K_1. Suma promieni tych kul jest równa długości przekątnej sześcianu $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Zatem promień kuli K jest równy $\frac{\sqrt{6}}{2}-1=\frac{\sqrt{6}-2}{2}$.



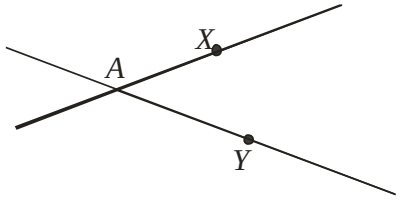
Finał, część II.

a) Zawody finałowe, część druga. Zadania otwarte.

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie liczby trzycyfrowe $n = (abc)_{10}$, które po powiększeniu o 198 są liczbą trzycyfrową zapisaną za pomocą wszystkich cyfr a, b, c i cyfra b jest średnią arytmetyczną cyfr a i c. Uzasadnij, że zostały wypisane wszystkie liczby spełniające warunki zadania.

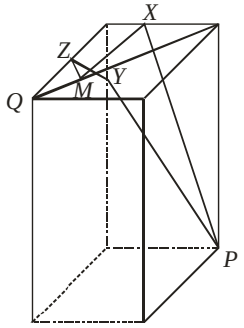
Zadanie 2. Dla jakich wartości parametrów m i k dwa pierwiastki równania $x^3 + 3x^2 - 4x + m = 0$ są pierwiastkami równania $x^3 - 2x^2 - 9x + k = 0$?

Zadanie 3. Dwa statki płyną ze stałą prędkością (niekoniecznie taką samą dla obydwu statków) po dwóch torach tworzących pewien kąt. O godzinie 12.00 znajdują się w punktach X i Y odległych od siebie o 23 jednostki długości. O 12.30 są odległe od siebie o 17 jednostek długości, a o 13.00 o 13 jednostek długości. O której godzinie odległość między nimi będzie najmniejsza?



Zadanie 4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są długości wszystkich boków $AB = 7, DC = \sqrt{65}, AD = BC = 5$. Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych tego czworokąta. Wyznacz pole czworokąta $ABCD$, jeśli $P_{ADS} + P_{BSC} = P_{ABS} + P_{DSC}$.

Zadanie 5. Dwie mrówki wędrują z wierzchołka P do punktu M leżącego na przekątnej górnej podstawy prostopadłościanu o podstawie będącej kwadratem o boku 1 i wysokości 2. Najpierw wybrały one ściany do wędrówki, a następnie możliwie najkrótsze drogi. Jedna z mrówek wędrowała wzdłuż dwóch odcinków PX i XM, a druga mrówka wzdłuż odcinków PY, YZ i ZM. Okazało się, że obie mrówki przebyły tę samą drogę. Wyznacz długość drogi przebytej przez każdą z mrówek oraz odległość QM. Punkty X, Y, Z leżą na krawędziach sześcianu.



b) Zawody finałowe, część druga. Szkice rozwiązań zadań otwartych.

Zadanie 1. Niech $c = 0$. Wtedy $\frac{a+0}{2} = b$, a więc cyfry liczby mają postać $2b, b, 0$. Ponieważ liczba jest trzycyfrowa, to $b \neq 0$. Wynika stąd, że po dodaniu liczby 198, cyfry otrzymanej liczby będą następujące $2b + 1 + 1, b + 9 - 10, 8$, a więc $2b + 2, b - 1, 8$. Ponieważ otrzymana liczba ma być liczbą trzycyfrową zapisaną za pomocą wszystkich cyfr $2b, b, 0$, to wtedy $b - 1 = 0$, ale to jest niemożliwe, bo wtedy cyfra 8 nie występuje w danej liczbie.
Jeśli $c = 1$, wtedy cyfry liczby mają postać $2b - 1, b, 1$, a po dodaniu liczby 198, cyfry otrzymanej liczby będą następujące $2b + 2, b - 1, 9$. Ponieważ otrzymana liczba ma być liczbą trzycyfrową zapisaną za pomocą wszystkich cyfr $2b - 1, b, 1$, to wtedy $b - 1 = 1$ czyli $b = 2$. Otrzymujemy wtedy liczbę 321, która nie spełnia warunków zadania.
Niech $c \neq 0$ i $c \neq 1$. Wtedy po dodaniu liczby 198 cyfry otrzymanej liczby będą następujące $a + 1 + 1, b + 9 + 1 - 10, c + 8 - 10$, a więc $a + 2, b, c - 2$. Ponieważ otrzymana liczba jest liczbą trzycyfrową zapisaną za pomocą wszystkich cyfr a, b, c, to możliwe są przypadki $a + 2 = c$ lub $c - 2 = a$, czyli $a = c - 2$. Z warunków zadania $b = \frac{a+c}{2} = c - 1$. Otrzymana liczba ma cyfry $c, c - 1, c - 2$. Dodanie liczby 198 zwiększyło cyfrę setek o 2, cyfrę dziesiątek pozostawiło bez zmian, a cyfrę jedności zmniejszyło o 2. Wynika stąd, że dana liczba miała cyfry postaci $c - 2, c - 1, c$. Jasne jest, że $c \geq 3$. Liczbami spełniającymi warunki zadania są 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789.

Zadanie 2. Niech pierwiastkami wielomianu $x^3 + 3x^2 - 4x + m$ będą liczby x_1, x_2, x_3' i niech wielomian $x^3 - 2x^2 - 9x + k$ ma pierwiastki x_1, x_2, x_3''. Odejmując te wielomiany otrzymujemy wielomian $5x^2 + 5x + m - k$ o pierwiastkach x_1, x_2. Na mocy wzorów Viete'a mamy

(1) $$x_1 + x_2 = -1.$$

Ze wzorów Viete'a dla wielomianu $x^3 + 3x^2 - 4x + m$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3' = -3 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3' + x_2 x_3' = -4 \\ x_1 x_2 x_3' = -m. \end{cases}$$

Stąd i z (1) otrzymujemy, że $x_3' = -2$ i

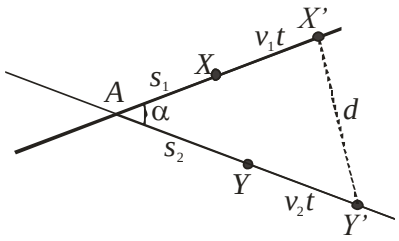
(2) $$x_1 x_2 = -6.$$

Z warunku (2) i trzeciej równości układu wynika, że $m = -12$.
Ze wzorów Viete'a dla wielomianu $x^3 - 2x^2 - 9x + k$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3'' = 2 \\ x_1 x_2 x_3'' = -k. \end{cases}$$

Stąd i z (1) wynika, że $x_3'' = 3$. Zatem ostatnia równość i warunek (2) implikują, że $k = 18$.
Uwaga. Można sprawdzić, że dla wyznaczonych wartość m i k, wielomiany mają postać $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ i $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, a ich pierwiastkami są odpowiednio $-3, 2, -2$ i $-3, 2, 3$.

Zadanie 3. Oznaczmy przez α miarę kąta jaki tworzą tory statków. Niech $s_1 = AX, s_2 = AY$ i niech v_1, v_2 (prędkości mogą przyjmować wartości ujemne – statek z ujemną prędkością płynie wtedy w kierunku przeciwnym niż sugeruje to rysunek) oznaczają prędkości statków



poruszających się odpowiednio po torach AX i AY w czasie t. Wtedy na mocy twierdzenia kosinusów

$$d^2 = (s_1 + v_1 t)^2 + (s_2 + v_2 t)^2 - 2(s_1 + v_1 t)(s_2 + v_2 t)\cos \propto.$$

Zauważmy, że po uporządkowaniu d^2 jest trójmianem kwadratowym zmiennej t. Zapiszmy go w postaci $d^2 = f(t) = at^2 + bt + c$, gdzie t oznacza czas (wyrażony w jednostce równej 30 minut) liczony od momentu, gdy statki znajdowały się w punktach X i Y. Otrzymujemy układ warunków

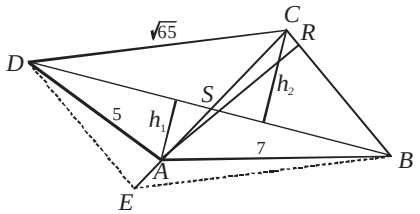
$$\begin{cases} f(0) = 23 \\ f(1) = 17 \\ f(2) = 13, \end{cases} \text{ a więc } \begin{cases} c = 23 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 17 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 13 \end{cases}.$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $a = 1, b = -7, c = 23$.

Zatem $f(t) = t^2 - 7t + 23$. Funkcja f najmniejszą wartość przyjmuje dla $t_0 = -\frac{-7}{2 \cdot 1} = \frac{7}{2}$.

Odległość między statkami będzie najmniejsza po upływie $\frac{7}{2} \cdot 30 = 105$ minut od momentu, gdy statki znajdowały się w punktach X i Y, a więc o godzinie 13.45.

Zadanie 4. Z równości pól



(1) $$P_{ADS} + P_{BSC} = P_{ABS} + P_{DSC}$$

otrzymujemy $DS \cdot h_1 + BS \cdot h_2 = BS \cdot h_1 + DS \cdot h_2$, a więc $DS \cdot (h_1 - h_2) = BS \cdot (h_1 - h_2)$. Gdyby $h_1 = h_2$, to wtedy $P_{ADS} + P_{ABS} = P_{BSC} + P_{DSC}$, a to z warunku (1) daje, że $P_{ABS} = P_{BSC}$ i wtedy $AS = CS$. Jeśli $h_1 \neq h_2$, to wtedy $DS = BS$. Nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że $DS = BS$. Niech E będzie takim punktem półprostej CA, że czworokąt $DEBC$ jest równoległobokiem.

Wtedy $\sphericalangle CAD = 180^0 - \sphericalangle EAD = 180^0 - \sphericalangle DEA = 180^0 - \sphericalangle ECB$. Niech $\sphericalangle CAD = \alpha$. Na mocy twierdzenia kosinusów, w trójkącie DAC otrzymujemy

(2) $$40 = AC^2 - 10 \cdot AC \cdot \cos\alpha,$$

a trójkącie ABC mamy

(3) $$24 = AC^2 + 10 \cdot AC \cdot \cos\alpha.$$

Z warunków (2) i (3) otrzymujemy $AC \cdot \cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Wynika stąd, że $AC \cdot \cos(180^0 - \alpha) = -AC \cdot \cos\alpha = \frac{4}{5}$. Niech odcinek AR będzie wysokością trójkąta ABC. Z ostatnich wyliczeń wnioskujemy, że $CR = \frac{4}{5}$, a więc możemy obliczyć $BR = 5 - \frac{4}{5} = \frac{21}{5}$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABR otrzymujemy $AR = \sqrt{7^2 - \left(\frac{21}{5}\right)^2} = \frac{28}{5}$.Możemy obliczyć pole $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{5} \cdot 5 = 14$, a więc $P_{ABCD} = 2 \cdot 14 = 28$.

Zadanie 5. Rozważmy fragment siatki prostopadłościanu. Oznaczmy $QM = x$ i $PM = d$. Wtedy $x^2 + |PQ|^2 = d^2$ i $d^2 = |PR|^2 + \left(\sqrt{2} - x\right)^2 - 2 \cdot |PR| \cdot \left(\sqrt{2} - x\right) \cdot \cos 135^0$. Zatem $x^2 + 8 = d^2$ i $d^2 = 4 + \left(\sqrt{2} - x\right)^2 + 2\left(\sqrt{2} - x\right)\sqrt{2}$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $d = \frac{\sqrt{130}}{4}$ i $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.