



**MATEMATYKA
MOJA PASJA**



ERICPOL
I-EVOLUTION



Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Finał cz. II

27 stycznia 2015 roku

Instrukcja dla ucznia

1. Rozwiązania zadań zapisz na kartkach formatu A4, na jednej karcie rozwiązanie jednego zadania.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadanie 1. Dwa ślimaki pełzną z jednakową prędkością wzdłuż centymetra krawieckiego. Pierwszy ślimak zaczął wędrówkę wcześniej i do tej pory przeszedł 78,3 cm. Ile do tej pory przeszedł drugi ślimak, jeśli pierwszy ślimak przeszedł trzy razy tyle, ile drugi ślimak przeszedł do momentu, w którym pierwszy ślimak przeszedł tyle, ile do tej pory przeszedł drugi ślimak? Zakładamy, że każdy ze ślimaków zaczynał wędrówkę na początku centymetra krawieckiego.

Zadanie 2. Punkt P leży na prostej $y = x - 2$, a punkt Q leży na okręgu o o środku $S(4, -3)$ i średnicy 5. Wiadomo też, że środek tego okręgu leży na prostej PQ . Punkt R jest takim punktem okręgu o , że $|\angle QPR| = 30^\circ$.

a) Zapisz odległość d punktu S od prostej PR jako funkcję zmiennej x będącej odcięą (tzn. pierwszą współrzędną) punktu P .

b) Wyznacz najmniejszą i największą odcięą punktu P , dla której istnieje punkt P , spełniający warunki zadania.

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru a równanie $x^2 + ax + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = -6$ ma dwa różne rozwiązania, których suma kwadratów jest równa 7?

Zadanie 4. Wyznacz liczbę n , dla której $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots33}_{n \text{ cyfr}} = \frac{10^{69}}{27} - 23\frac{1}{27}$.

Uzasadnij, że taka liczba jest tylko jedna.

Zadanie 5. Okręgi o środkach A i B i różnych promieniach przecinają się w punktach P i Q . Punkt C jest punktem przecięcia wspólnej stycznej poprowadzonej do tych okręgów i prostej AB . Punkty X i Y są punktami tych okręgów odpowiednio o środkach w punktach B i A , leżącymi po różnych stronach prostej AB i takimi, że odcinek AY jest równoległy do odcinka BX . Punkt D jest punktem przecięcia odcinka XY i prostej AB . Wyznacz miarę kąta CQD . Podaj pełne rozwiązanie.