# Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych
## Finał Cz. I
27 stycznia 2015 roku

### Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 15. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 30 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

## Zadania zamknięte

**Zadanie 1 (2pkt.)**. Wykres funkcji liniowej $f(x)=kx+l$, gdzie $k, l>0$, ogranicza wraz z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $\frac{9}{4}$. Wtedy

A. $\frac{k}{l}=\frac{2}{3}$; B. $\frac{k}{l}=\frac{3}{2}$; C. $\frac{k}{l}=\frac{4}{9}$;

D. stosunek $\frac{k}{l}$ nie jest wyznaczony jednoznacznie.

**Zadanie 2 (2pkt.).** W sumie $1^{2015}+2^{2015}+3^{2015}+\ldots+2015^{2015}$ jest 2015 składników. Ostatnią cyfrą tej sumy jest

A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

**Zadanie 3 (2pkt.)**. Liczbę pięciocyfrową nazwiemy *specyficzną*, jeśli suma cyfr tysięcy i jedności tej liczby jest mniejsza od sumy cyfr dziesiątek i setek tej liczby. Liczba wszystkich pięciocyfrowych liczb specyficznych o różnych cyfrach utworzonych z cyfr 1, 2, 3, 4 i 5 jest równa

A. 42; B. 44; C. 46; D. 48.

**Zadanie 4 (2pkt.)**. Liczba punktów wspólnych wykresu funkcji $f(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-|x|-\frac{1}{2}}-1$ i prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}$, jest równa

A. 0; B. 1; C. 2; D. 4.

**Zadanie 5 (2pkt.)**. Liczby całkowite, dodatnie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ spełniają warunki $\log_{\alpha}\gamma=\frac{5}{6}$ i $\log_{\beta}\delta=\frac{1}{2}$. Jeśli $\alpha-\beta=53$, to wtedy $\gamma-\delta=$

A. 47; B. 89; C. 143; D. 217.

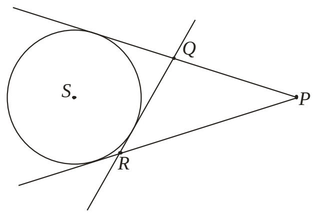
**Zadanie 6 (2pkt.)**. Wyrażenie $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt[7]{a}}}$ dla $a=\sqrt[9]{5^{14}}$ jest równe

A. $\sqrt[7]{5}$; B. $\sqrt[5]{5}$; C. $\sqrt[3]{5}$; D. 5.

**Zadanie 7 (2pkt.)**. Dane jest równanie $3x^2+mx+13=0$. Liczba wszystkich wymiernych *m*, większych od 1 i mniejszych od 100, dla których równanie ma pierwiastek całkowity jest równa

A. 29; B. 31; C. 33; D. 35.

**Zadanie 8 (2pkt.)**. Proste *PQ*, *PR* i *QR* są styczne do okręgu o środku *S*. Miary kątów *QPR* i *QSR* są równe. Wtedy




A. $|\angle QPR|=40^0$; B. $|\angle QPR|=50^0$;

C. $|\angle QPR|=60^0$;

D. miara kąta *QPR* nie jest wyznaczona jednoznacznie.

**Zadanie 9 (2pkt.)**. Dana jest funkcja $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$. Określamy funkcję $f_2(x)=f_1(f_1(x))$. Jeśli dla pewnego całkowitego $i\geq 1$ określona jest już funkcja $f_i(x)$, to wtedy określamy funkcję $f_{i+1}(x)=f_i(f_i(x))$. Mamy np. $f_2(2)=\dfrac{2}{5}$ i $f_3(2)=\dfrac{2}{7}$. Można obliczyć, że $f_5(1)=$

A. $\dfrac{1}{5}$; B. $\dfrac{1}{7}$; C. $\dfrac{1}{9}$ ; D. $\dfrac{1}{11}$.

**Zadanie 10 (2pkt.).** Rozważmy następujące równania:

$$x=1+\frac{1}{x},\ x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}},\ x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}},\ x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}},\ x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}.$$

Każde z nich ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie. Dodatnie rozwiązania tych równań zapisane w kolejności występujących równań tworzą ciąg

A. stały; B. malejący; C. rosnący;

D. o wyrazach wymiernych.

**Zadanie 11 (2pkt.)**. Reszta z dzielenia wielomianu $x^4+x^2+2$ przez wielomian $W(x)$ jest równa 4. Wtedy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nie może być

A. liczba $-1$ B. liczba $1$; C. liczba $2$; D. liczba wymierna.

**Zadanie 12 (2pkt.)**. Liczba dodatnich liczb całkowitych $k\in\langle 1,12\rangle$, dla których $\sin(6k)>0$, jest równa

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

**Zadanie 13 (2pkt.)**. Liczba różnych od liczb pierwszych dzielników naturalnych liczby $374\cdot 195$ jest równa

A. 48; B. 53; C. 58; D. 64.

**Zadanie 14 (2pkt.).** Odległości środka okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny od wierzchołków kątów ostrych są odpowiednio równe $\sqrt{2}$ i 1. Pole tego trójkąta jest równe

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; C. 1; D. $\dfrac{6}{5}$.

**Zadanie 15 (2pkt.)**. Sześcian o krawędzi długości $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{27}$ rzutujemy prostopadle na ustaloną płaszczyznę. Największa wartość pola powierzchni takiego rzutu jest równa

A. $\dfrac{7}{9}$; B. $\dfrac{8}{9}$; C. 1; D. $\dfrac{10}{9}$.

## Karta odpowiedzi

**Podpisz kartę odpowiedzi.**

Imię……………………………………………………………………………………..

Nazwisko……………………………………………………………………………..

Szkoła…………………………………………………………………………………

Miejscowość…………………………………………………………………………..

**Instrukcja do karty odpowiedzi**

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

| **25.** |
|---|
| **A** |
| |

to możesz dokonać poprawki

| **25.** |
|---|
| ~~**A**~~ |
| **C** |

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

## Karta odpowiedzi

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | **11.** | **12.** | **13.** | **14.** | **15.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |