



**MATEMATYKA  
MOJA PASJA**



## **Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych** **Etap szkolny** 12 grudnia 2013 roku

### **Instrukcja dla ucznia**

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Życzymy powodzenia  
Organizatorzy

## Zadania zamknięte

**Zadanie 1 (2pkt.).** Liczba  $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$  jest równa

- A.  $\sqrt{2}$ ;                      B. 2;                      C.  $2\sqrt{2}$ ;                      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Zadanie 2 (2pkt.).** Pole odcinka koła zawartego w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, jaki odcina oś  $OY$  od koła którego brzegiem jest okrąg o równaniu

$3x^2 + 12x + 3y^2 + 18y + 23 = 0$  jest równe

- A.  $\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$ ;    B.  $\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$ ;    C.  $\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{2}\right)$ ;    D.  $\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{2}\right)$ .

**Zadanie 3 (2pkt.).** Liczba par  $(a, b)$  liczb naturalnych dodatnich takich, że  $a^2 + b^2 = 22219$  jest równa.

- A. 0;                      B. 3;                      C. 100;                      D. 101.

**Zadanie 4 (2pkt.).** Równanie, którego pierwiastkami są suma i iloczyn pierwiastków równania  $3x^2 + 11x + 2 = 0$ , ma postać

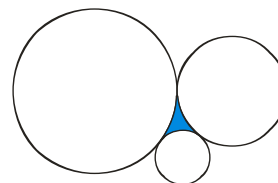
- A.  $9x^2 - 39x + 22 = 0$ ;                      B.  $9x^2 + 27x - 22 = 0$ ;  
C.  $9x^2 - 27x - 22 = 0$ ;                      D.  $9x^2 + 39x + 22 = 0$ .

**Zadanie 5 (2pkt.).** Niech  $\log_3 4 = a$  i  $\log_3 5 = b$ . Wtedy  $\log_3 324000 =$

- A.  $4 + 3a + 2,5b$ ;    B.  $3 + 2,5a + 4b$ ;    C.  $4 + 2,5a + 3b$ ;    D.  $2,5 + 3a + 3b$ .

**Zadanie 6 (2pkt.).** Każde dwa z trzech okręgów o promieniach 1, 2 i 3 są styczne zewnętrznie. Niech  $\alpha$  i  $\beta$  będą takimi kątami ostrymi, że  $\cos \alpha = \sin \beta = 0,8$ . Wtedy pole obszaru zawartego pomiędzy tymi okręgami jest równe

- A.  $6 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{20} + \frac{\beta}{45}\right)$ ;    B.  $6 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{45} + \frac{\beta}{20}\right)$ ;  
C.  $6 - \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{20} + \frac{\beta}{45}\right)$ ;    D.  $6 - \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{45} + \frac{\beta}{20}\right)$ .



**Zadanie 7 (2pkt.).** Liczba wszystkich trójek  $(a, b, c)$  liczb parzystych dodatnich takich, że  $a + b + c = 50$ , jest równa

- A. 276;                      B. 300;                      C. 324;                      D. 375.

**Zadanie 8 (2pkt.).** Wielomiany  $W(x) = (3x - k)^3$  i  $P(x) = 27x^2(x - k) + 4(9x - k)$  są równe. Wtedy

- A.  $k = 2$ ;                      B.  $k = -2$ ;                      C.  $|k| = 2$ ;                      D.  $k = -2$  i  $k = 2$ .

**Zadanie 9 (2pkt.).** Kolorem szarym pokryto 50% białej kartki. Następnie w pierwszym kroku zwiększono pokryty obszar o 10% tego obszaru i potem w każdym kolejnym kroku pokrycie kartki kolorem szarym było o 10% większe od poprzedniego. Najmniejsza liczba kroków, po których pokryty obszar będzie większy od 80% kartki, jest równa

- A. 8;                      B. 6;                      C. 5;                      D. 4.

**Zadanie 10 (2pkt.).** Najmniejsza wartość funkcji  $f(x) = \sin^2 x + \sin x + a$  jest równa  $\sqrt{3}$ .

Wynika stąd, że  $a =$

- A.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ;                      B.  $\sqrt{3} + 0,25$ ;                      C.  $\frac{3}{2}$ ;                      D.  $\frac{9}{4}$ .

**Zadanie 11 (2pkt.).** Szachownica składa się z 150 kwadratów jednostkowych ułożonych w 10 rzędów, z których każdy zawiera po 15 kwadratów. Łącząc niektóre z takich kwadratów możemy otrzymać prostokąty (w tym także kwadraty). Liczba wszystkich prostokątów o bokach będących liczbami parzystymi, które można w ten sposób utworzyć, jest równa

- A. 1400;                      B. 1680;                      C. 3600;                      D. 5400.

**Zadanie 12 (2pkt.).** Na dwie ściany pudełka w kształcie prostopadłościanu naklejono prostokątną kartkę papieru o wymiarach  $300 \times 400$ , w ten sposób, że jeden z odcinków łączących przeciwległe rogi tej kartki pokrył się z jedną z krawędzi pudełka. Odległość (w linii prostej) rogów kartki przyklejonych do sąsiednich ścian pudełka jest równa

- A. 360;                      B.  $20\sqrt{337}$ ;                      C.  $40\sqrt{193}$ ;                      D. 480.

### Zadania otwarte

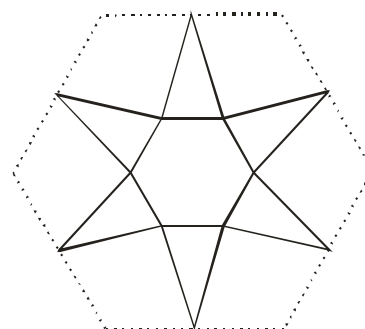
**Zadanie 13 (6 pkt.).** Liczby całkowite  $x$  i  $y$  zostały tak dobrane, że liczby  $5xy$ ,  $x^2 + y^2$ ,  $-9$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz  $x$  i  $y$ .

**Zadanie 14 (7 pkt.).** Dla jakich wymiernych wartości parametru  $m$  suma czwartych potęg rozwiązań  $x_1, x_2$  równania

$$(3m - 4)x^2 - 3mx - 3m + 4 = 0.$$

jest liczbą całkowitą?

**Zadanie 15 (6 pkt.).** Środki boków dużego sześciokąta foremnego o boku  $4\sqrt{6}$  połączono za pomocą odcinków z wierzchołkami małego sześciokąta foremnego o boku  $\sqrt{6}$ . Mały sześciokąt i sześć dorysowanych trójkątów równoramiennych tworzą siatkę ostrosłupa. Oblicz promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.



**Zadanie 16 (7 pkt.).** W kwadracie  $ABCD$  o boku 4 cm połączono punkt  $D$  ze środkiem  $K$  boku  $AB$ , a wierzchołek  $A$  ze środkiem  $L$  boku  $BC$ . Jakie jest pole trójkąta  $MND$ , gdzie  $M$  jest punktem przecięcia odcinków  $DK$  i  $AL$ , a  $N$  punktem przecięcia odcinka  $AL$  z przekątną  $BD$ ?

## Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię.....

Nazwisko.....

Szkoła.....

Miejscowość.....

### Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
<del>A</del>
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

## Karta odpowiedzi

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.