Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Etap szkolny

12 grudnia 2013 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jeden z nich jest poprawny. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic ze wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadanie 1 (2pkt.). Liczba $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$ jest równa

A. $\sqrt{2}$; B. 2; C. $2\sqrt{2}$; D. $3\sqrt{2}$.

Zadanie 2 (2pkt.). Pole odcinka koła zawartego w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, jaki odcina oś OY od koła którego brzegiem jest okrąg o równaniu $3x^2+12x+3y^2+18y+23=0$ jest równe

A. $\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$; B. $\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$; C. $\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{2}\right)$; D. $\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{2}\right)$.

Zadanie 3 (2pkt.). Liczba par (a,b) liczb naturalnych dodatnich takich, że $a^2+b^2=22219$ jest równa.

A. 0; B. 3; C. 100; D. 101.

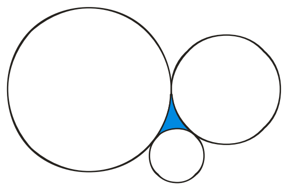
Zadanie 4 (2pkt.). Równanie, którego pierwiastkami są suma i iloczyn pierwiastków równania $3x^2+11x+2=0$, ma postać

A. $9x^2-39x+22=0$; B. $9x^2+27x-22=0$;
C. $9x^2-27x-22=0$; D. $9x^2+39x+22=0$.

Zadanie 5 (2pkt.). Niech $\log_3 4=a$ i $\log_3 5=b$. Wtedy $\log_3 324000=$

A. $4+3a+2{,}5b$; B. $3+2{,}5a+4b$; C. $4+2{,}5a+3b$; D. $2{,}5+3a+3b$.

Zadanie 6 (2pkt.). Każde dwa z trzech okręgów o promieniach 1, 2 i 3 są styczne zewnętrznie. Niech α i β będą takimi kątami ostrymi, że $\cos\alpha=\sin\beta=0{,}8$. Wtedy pole obszaru zawartego pomiędzy tymi okręgami jest równe



A.; $6-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{20}+\frac{\beta}{45}\right)$; B. $6-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{45}+\frac{\beta}{20}\right)$;

C. $6-\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{20}+\frac{\beta}{45}\right)$; D. $6-\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{45}+\frac{\beta}{20}\right)$.

Zadanie 7 (2pkt.). Liczba wszystkich trójek (a,b,c) liczb parzystych dodatnich takich, że $a+b+c=50$, jest równa

A. 276; B. 300; C. 324; D. 375.

Zadanie 8 (2pkt.). Wielomiany $W(x)=(3x-k)^3$ i $P(x)=27x^2(x-k)+4(9x-k)$ są równe. Wtedy

A. $k=2$; B. $k=-2$; C. $|k|=2$; D. $k=-2$ i $k=2$.

Zadanie 9 (2pkt.). Kolorem szarym pokryto 50% białej kartki. Następnie w pierwszym kroku zwiększono pokryty obszar o 10% tego obszaru i potem w każdym kolejnym kroku pokrycie kartki kolorem szarym było o 10% większe od poprzedniego. Najmniejsza liczba kroków, po których pokryty obszar będzie większy od 80% kartki, jest równa

A. 8; B. 6; C. 5; D. 4.

Zadanie 10 (2pkt.). Najmniejsza wartość funkcji $f(x)=\sin^2 x+\sin x+a$ jest równa $\sqrt{3}$. Wynika stąd, że $a=$

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; B. $\sqrt{3}+0{,}25$; C. $\frac{3}{2}$; D. $\frac{9}{4}$.

Zadanie 11 (2pkt.). Szachownica składa się z 150 kwadratów jednostkowych ułożonych w 10 rzędów, z których każdy zawiera po 15 kwadratów. Łącząc niektóre z takich kwadratów możemy otrzymać prostokąty (w tym także kwadraty). Liczba wszystkich prostokątów o bokach będących liczbami parzystymi, które można w ten sposób utworzyć, jest równa

A. 1400; B. 1680; C. 3600; D. 5400.

Zadanie 12 (2pkt.). Na dwie ściany pudełka w kształcie prostopadłościanu naklejono prostokątną kartkę papieru o wymiarach 300×400, w ten sposób, że jeden z odcinków łączących przeciwległe rogi tej kartki pokrył się z jedną z krawędzi pudełka. Odległość (w linii prostej) rogów kartki przyklejonych do sąsiednich ścian pudełka jest równa

A. 360; B. $20\sqrt{337}$; C. $40\sqrt{193}$; D. 480.

Zadania otwarte

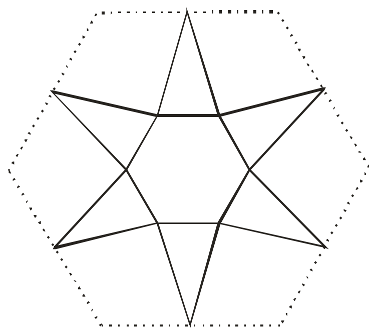
Zadanie 13 (6 pkt.). Liczby całkowite x i y zostały tak dobrane, że liczby $5xy,\ x^2+y^2,\ -9$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz x i y.

Zadanie 14 (7 pkt.). Dla jakich wymiernych wartości parametru m suma czwartych potęg rozwiązań x_1, x_2 równania

$$(3m-4)x^2-3mx-3m+4=0.$$

jest liczbą całkowitą?

Zadanie 15 (6 pkt.). Środki boków dużego sześciokąta foremnego o boku $4\sqrt{6}$ połączono za pomocą odcinków z wierzchołkami małego sześciokąta foremnego o boku $\sqrt{6}$. Mały sześciokąt i sześć dorysowanych trójkątów równoramiennych tworzą siatkę ostrosłupa. Oblicz promień kuli wpisanej w ten ostrosłup.



Zadanie 16 (7 pkt.). W kwadracie $ABCD$ o boku 4 cm połączono punkt D ze środkiem K boku AB, a wierzchołek A ze środkiem L boku BC. Jakie jest pole trójkąta MND, gdzie M jest punktem przecięcia odcinków DK i AL, a N punktem przecięcia odcinka AL z przekątną BD?

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię……………………………………………………………………………………..

Nazwisko……………………………………………………………………………..

Szkoła…………………………………………………………………………………

Miejscowość…………………………………………………………………………..

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
~~**A**~~
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**