Matematyka moja pasja

Konkurs dla szkół ponadgimnazjalnych

Etap szkolny

10 stycznia 2012 roku

Instrukcja dla ucznia

1. W zadaniach o numerach od 1. do 12. są podane cztery warianty odpowiedzi: A, B, C, D. Dokładnie jedna z nich jest poprawna. Odpowiedzi do tych zadań wpisz na załączonej karcie odpowiedzi.
2. W czasie konkursu nie wolno używać kalkulatora ani tablic z wzorami.
3. Czas przeznaczony na rozwiązanie zadań wynosi 120 minut.
4. Możesz uzyskać maksymalnie 45 punktów.

Życzymy powodzenia
Organizatorzy

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (2pkt.). Liczba zer kończących zapis rozwinięcia dziesiętnego iloczynu $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 34$ trzydziestu czterech kolejnych liczb naturalnych jest równa

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Zadanie 2 (2pkt.). Jeśli $\frac{x}{f}+\frac{2}{y}=\frac{3x}{fy}$ i $y\neq 0,\ y\neq 3,\ f\neq 0$, to

A. $x=\frac{2f}{y-3}$ B. $x=\frac{2f}{3-y}$ C. $x=\frac{2f}{3y}$ D. $x=-\frac{2f}{3y}$

Zadanie 3 (2pkt.). Jeśli $x+y=1$ i $x^2+y^2=9$, to x^4+y^4 jest równe

A. 49 B. 51 C. 112 D. 113

Zadanie 4 (2pkt.). Liczba rozwiązań równania $\left||x-2|-1\right|=3$ jest równa

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 5 (2pkt.). Na brzegu koła *K* o środku w punkcie *C* leżą dwa różne punkty *A* i *B*. Miara kąta *ACB* jest równa 30^0. Stosunek pola koła *K* do pola trójkąta *ABC* jest równy

A. 9 B. 4π C. $4{,}5\pi$ D. 6π

Zadanie 6 (2pkt.). Wykres funkcji $f(x)=-3x^2+2x-3$ przekształcono najpierw w symetrii względem osi *OX*, a następnie przesunięto o 1 jednostkę w dół wzdłuż osi *OY* i otrzymano wykres funkcji *g*. Wtedy wykres funkcji $h(x)=g(2-x)$ przyjmuje

A. najmniejszą wartość równą $\frac{5}{3}$ dla argumentu równego $-\frac{5}{3}$.

B. najmniejszą wartość równą $\frac{5}{3}$ dla argumentu równego $-\frac{7}{3}$.

C. najmniejszą wartość równą $\frac{5}{3}$ dla argumentu równego $\frac{5}{3}$.

D. najmniejszą wartość równą $\frac{5}{3}$ dla argumentu równego $\frac{7}{3}$.

Zadanie 7 (2pkt.). Odległość środków dwóch przecinających się okręgów o promieniach 3 i 6 może być równa każdej liczbie z przedziału

A. $\langle 4,8)$ B. $(3,9\rangle$ C. $(2,6)$ D. $\langle 5,10\rangle$

Zadanie 8 (2pkt.). Gumowa piłka, zrzucona z wysokości *h*, przy każdym odbiciu wznosi się na wysokość dwa razy mniejszą, niż przy poprzednim odbiciu. Łączna droga, którą pokonała piłka aż do szóstego odbicia się jest równa 47m. Wysokość *h* jest równa

A. $15\frac{17}{38}$ m B. 16m C. $23\frac{55}{63}$ m D. 24m

Zadanie 9 (2pkt.). W wierszu zapisano kolejno ileś liczb. Suma każdych 5-ciu liczb stojących na kolejnych miejscach nieparzystych jest równa 98, a suma każdych 5-ciu liczb stojących na kolejnych miejscach parzystych jest równa 129. Wiadomo, że liczba stojąca na miejscu trzecim jest równa 11, a na miejscu szóstym 2. Suma liczb stojących na miejscach 663 i 976 jest równa

A. 13 B. 44 C. 240 D. 1639

Zadanie 10 (2pkt.). Równanie $\log_2(x+2) = kx$ ma dwa różne rozwiązania. Jest to możliwe, gdy

A. $k = -2^2$ B. $k = -2^3$ C. $k = \pi$ D. $k = 0$

Zadanie 11 (2pkt.). W danym sześciokącie wypukłym *ABCDEF* uczeń ma wykreślić wszystkie przekątne. Ma on do dyspozycji trzy kredki: czerwoną, czarną i niebieską. Liczba różnych rysunków różniących się układem kolorów, które może wykonać uczeń, jest równa

A. 15 B. 120 C. 504 D. 3^9

Zadanie 12 (2pkt.). Z czterech identycznych kul o promieniu 1,5 zbudowano piramidę w taki sposób, że trzy kule umieszczono na płaskim podłożu tak, by się stykały, a na nich położono czwartą kulę. Wysokość powstałej w ten sposób piramidy jest równa

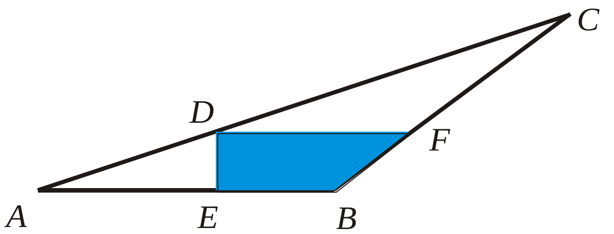
A. $\sqrt{6}$ B. $3+\sqrt{3}$ C. $3+\sqrt{6}$ D. $6\sqrt{3}$

Zadania otwarte

Zadanie 13 (3 pkt.). Udowodnij, że jeśli *a* i *b* są liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $b \le a$ i $2\cdot a^3 + 1\cdot b + 2 = 2012$, to $a = b = 10$.

Zadanie 14 (5 pkt.). Bolek wypisał na kartce 2012 wyrazów ciągu arytmetycznego 2,9,16,... , zaś Lolek wypisał na kartce 2012 wyrazów ciągu arytmetycznego 3,7,11,... . Ile liczb napisanych przez Bolka znajduje się na kartce Lolka?

Zadanie 15 (7 pkt.).W trójkącie rozwartokątnym *ABC* o polu równym 7,5 dane są $|AB| = |CB| = 5$. W trójkąt ten wpisano trapez prostokątny *EBFD* tak jak na rysunku. Przy jakiej wysokości trapezu jego pole jest największe?



Zadanie 16 (6 pkt.). W okrąg wpisano czworokąt wypukły *ABCD* taki, że jego przekątna *AC* leży na średnicy okręgu, a druga przekątna *BD* i bok *DC* są takiej samej długości. Punkt *P* przecięcia się przekątnych czworokąta jest tak położony, że długość odcinka *AP* stanowi $\frac{3}{5}$ promienia okręgu. Zapisz długość boku *AB* w zależności od promienia okręgu.

Karta odpowiedzi

Podpisz kartę odpowiedzi.

Imię………………………………………………………………………………………..

Nazwisko……………………………………………………………………………..

Szkoła………………………………………………………………………………………

Miejscowość……………………………………………………………………………..

Instrukcja do karty odpowiedzi

Odpowiedzi do zadań zamkniętych (**A**, **B**, **C** lub **D**) wpisz tylko do poniższej tabeli w pierwszym wierszu pod numerem odpowiedniego zadania. Jeśli się pomyliłeś, to przekreśl błędną odpowiedź i napisz poprawną odpowiedź w wierszu poniżej.

Np. Jeśli pomyliłeś się pisząc

25.
A

to możesz dokonać poprawki

25.
~~**A**~~
C

Każdą z odpowiedzi możesz poprawić tylko jeden raz.

Życzymy powodzenia.

Karta odpowiedzi

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**